



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
**Universidade Federal Fluminense**

---

---

# **ATALHOS PARA ADIABATICIDADE E APLICAÇÕES EM COMPUTAÇÃO QUÂNTICA**

---

---

POR:

ALAN COSTA DOS SANTOS

ORIENTADO POR:

DR. MARCELO SILVA SARANDY

ALAN COSTA DOS SANTOS

ATALHOS PARA ADIABATICIDADE E APLICAÇÕES EM  
COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Dissertação apresentada junto ao programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como parte dos requisitos básicos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy

Niterói-RJ

2016

Dedico essa conquista aos meus pais, Zé Almir e Toinha, aos meus irmãos Ramon, Saymom e Herisson e à minha namorada, Dâmaris Frutuoso.

*In memoriam* Francisco José de Moraes, o grande Chicão.

## AGRADECIMENTOS

Eu agradeço primeiramente àqueles que são os principais responsáveis pela minha existência e pelo homem que hoje sou. Obrigado paiinho e mainha, por nunca desistirem de mim e, mesmo que distante, “puxarem minhas orelhas” para o que é certo. Obrigado paiinho por todos os dias batalhar e, por muitas vezes, arriscar a vida para nos dar o pão de cada dia. Obrigado mainha por todo o carinho e amor, jamais esquecerei que tenho a melhor mãe do mundo. Meus irmãos Almir Herisson, Saymon Costa e Ramon Costa também estão no topo dessa pirâmide.

Não posso deixar de agradecer à minha linda e carinhosa namorada, Dâmaris Frutuoso (my Penny). Amor, obrigado por ter sido, além de namorada, minha fiel amiga. Por corrigir muitos dos meus defeitos e por me proporcionar momentos inesquecíveis ao seu lado. A cada dia tenho mais certeza de sua importância em minha vida. Eu te amo.

Agradeço também aos familiares que acompanharam de perto toda minha caminhada, tia Solange, tia Ana e tia Raquel. Aos primos Hiandra, Nahuana, Eliézio Jr., Kaká e Aryadne. Obrigado aos meus padrinhos Paulo Santiago e Tia Bebé, por estarem sempre lembrando de mim com carinho e sempre demonstrarem tanto amor. Não posso deixar de mencionar aqueles que são os meus “pais do Rio”, tia Toinha e Eliézio. Obrigado por sempre segurarem minha mão e por não me deixar esquecer do meu lugar e da minha cultura, além do amor incondicional. Agradeço aos meus grandes amigos Alisson, Pedro Costa (Pedrinho), Thiago, César Jr., Alberto Jhonatas, Rennan Teles e Bruno Siebra pelos anos de amizade e pelas inúmeras horas de descontração que sempre me fizeram tão bem.

Aos meus ex-professores e mentores Francisco Augusto, Eduardo Filho e Wilson Hugo do departamento de física da Universidade Regional do Cariri (URCA), pelos ensinamentos, conversas e principalmente pela amizade. Ao professor Mickel Abreu de Ponte, que é o principal responsável por eu estar tão satisfeito com minha escolha de linha de pesquisa. Agradeço pelos seus esforços em orientar-me durante 1 ano, ensinando como ser um pesquisador, a investigar e, acima de tudo, como manter sempre a cabeça erguida diante dos mais difíceis obstáculos acadêmicos.

Aos amigos do IF-UFF que fiz nessa caminhada de dois anos, Magno Verly, Davor Lopes, Fernando Fabris, Alexsandro dos Santos, Raphael Fonseca (Jeca), André Oestereich e Marcel Nogueira (Paulista), pelas boas horas de descontração na copa, tomando o velho e bom cafezinho, e por serem meus companheiros de guerra durante o mestrado. Agradeço também ao grande Tiago Ribeiro, por ter aberto as portas de seu AP para receber-me durante todo esse tempo, pelas conversas sobre física e pelos ensinamentos que adquiri vendo seu jeito de ser. Ao grande Anderson Tomaz, pelos incentivos e descontrações nas conversas sobre física. Não poderia deixar de agradecer ao “ex-físico”, hoje empresário, Raphael Silva e ao professor Ernesto Galvão por uma valiosa ajuda em um momento complicado em minha caminhada. Sempre carregarei comigo o sentimento de dívida com vocês.

Por fim, o responsável por tudo isso que está acontecendo em minha carreira acadêmica. Ao Marcelo Sarandy, o meu obrigado de coração. Sei que não deve ter sido fácil orientar-

me durante esse tempo, por isso sei do tamanho esforço que fez, além da enorme paciência, para tornar tudo isso possível. Agradeço pelas horas de conversa, dedicação e pelos valiosos conselhos profissionais e acadêmicos.

“Eu sou de uma terra que o povo padece  
Mas não esmorece, procura vencer,  
Da terra querida, que a linda cabocla  
Com riso na boca zomba no sofrer.  
Não nego meu sangue, não nego meu nome.  
Olho para fome e ‘pregunto’: o que há?  
Eu sou brasileiro fio do Nordeste,  
Sou Cabra da peste, sou do Ceará

Ceará valente que foi muito franco  
Ao guerreiro branco Soares Moreno,  
Terra estremecida, terra predileta  
Do grande poeta ‘Juvená’ Galeno.  
Sou dos ‘verde’ mares da cor da esperança,  
Que ‘as água’ balança pra lá e pra cá.  
Eu sou brasileiro fio do Nordeste,  
Sou Cabra da peste, sou do Ceará.”

*Patativa do Assaré.*

## RESUMO

Evolução adiabática é uma poderosa técnica em computação e informação quântica. No entanto, sua performance é limitada pelo teorema adiabático da mecânica quântica. Neste cenário, atalhos para adiabaticidade, tais como concebidos pela teoria superadiabática, constituem uma valiosa ferramenta para acelerar o comportamento quântico adiabático. Nesta dissertação nós introduzimos dois diferentes modelos capazes de realizar computação quântica superadiabática, onde nosso método é baseado no uso de atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos. O primeiro modelo mostrado aqui é baseado no uso do teleporte quântico superadiabático, introduzido nessa dissertação, como um primitivo para computação quântica. Dessa forma, nós fornecemos o Hamiltoniano contra-diabático para portas arbitrárias de  $n$  q-bits. Além disso, nossa abordagem relaciona, por meio de uma simples transformação unitária, o Hamiltoniano contra-diabático para o teleporte de *portas* arbitrárias de  $n$  q-bits com o Hamiltoniano contra-diabático usado para o teleporte de *estados* de  $n$  q-bits. No segundo modelo nós usamos o conceito de evoluções superadiabáticas controladas para mostrar como implementar portas quânticas  $n$ -controladas arbitrárias. Notavelmente, essa tarefa pode ser realizada por um simples Hamiltoniano contra-diabático independente do tempo. Ambos os modelos podem ser usados para a implementação de diferentes conjuntos universais de portas quânticas. Nós mostramos que o uso do *quantum speed limit* (limite de velocidade quântica) sugere que o tempo de evolução superadiabática é compatível com intervalos tempos arbitrariamente pequenos, onde essa arbitrariedade está vinculada ao custo energético necessário para realizar a evolução superadiabática.

## ABSTRACT

Adiabatic evolution is a powerful technique in quantum information and computation. However, its performance is limited by the adiabatic theorem of quantum mechanics. In this scenario, shortcuts to adiabaticity, such as provided by the superadiabatic theory, constitute a valuable tool to speed up the adiabatic quantum behavior. In this dissertation we introduce two different models to perform universal superadiabatic quantum computing, which are based on the use of shortcuts to adiabaticity by counter-diabatic Hamiltonians. The first model is based on the use of superadiabatic quantum teleportation, introduced in this dissertation, as a primitive to quantum computing. Thus, we provide the counter-diabatic driving for arbitrary  $n$ -qubit gates. In addition, our approach maps the counter-diabatic Hamiltonian for an arbitrary  $n$ -qubit *gate* teleportation into the implementation of a rotated counter-diabatic Hamiltonian for an  $n$ -qubit *state* teleportation. In the second model we use the concept of controlled superadiabatic evolutions to show how we can implement arbitrary  $n$ -controlled quantum gates. Remarkably, this task can be performed by simple time-independent counter-diabatic Hamiltonians. These two models can be used to design different sets of universal quantum gates. We show that the use of the quantum speed limit suggests that the superadiabatic time evolution is compatible with arbitrarily small time intervals, where this arbitrariness is constrained to the energetic cost necessary to perform the superadiabatic evolution.



# Conteúdo

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Introdução</b>   | <b>13</b> |
| 1.1       | Notação . . . . .   | 16        |
| 1.2       | Portas Elementares em Computação Quântica . . . . .                         | 17        |
| <b>I</b>  | <b>Computação Quântica Adiabática</b>                                       | <b>19</b> |
| <b>2</b>  | <b>Teorema Adiabático</b>   | <b>20</b> |
| 2.1       | Teorema Adiabático: Condição sobre o Hamiltoniano . . . . .                 | 21        |
| 2.2       | Teorema Adiabático: Condição sobre o tempo de evolução . . . . .            | 22        |
| <b>3</b>  | <b>Computação Quântica Universal via Teleporte Quântico Adiabático</b>      | <b>25</b> |
| 3.1       | Teleportando um estado quântico desconhecido . . . . .                      | 25        |
| 3.2       | Computação Quântica via TQ . . . . .  | 27        |
| 3.2.1     | TQ via circuitos: O Protocolo . . . . .                                     | 27        |
| 3.2.2     | TQ de portas de 1 q-bit . . . . .   | 28        |
| 3.2.3     | TQ de portas controladas . . . . .  | 29        |
| 3.3       | Computação Quântica Adiabática via TQ . . . . .                             | 30        |
| 3.3.1     | TQ Adiabático . . . . .   | 31        |
| 3.3.2     | TQ Adiabático de 2 q-bits . . . . .   | 36        |
| 3.3.3     | TQ Adiabático de $n$ q-bits . . . . .                                       | 41        |
| 3.3.4     | Portas quânticas de 1 q-bit via TQ . . . . .                                | 43        |
| 3.3.5     | Portas quânticas de 2 q-bits via TQ . . . . .                               | 46        |
| 3.3.6     | Portas quânticas de $n$ q-bits via TQ . . . . .                             | 49        |
| <b>4</b>  | <b>Computação Quântica Universal por Evoluções Adiabáticas Controladas.</b> | <b>51</b> |
| 4.1       | Evoluções Adiabáticas Controladas (EAC) . . . . .                           | 51        |
| 4.2       | Portas de 1 e 2 q-bits via EAC . . . . .                                    | 52        |
| 4.2.1     | Unitários de um 1 q-bit via EAC . . . . .                                   | 52        |
| 4.2.2     | Portas controladas por 1 q-bit via EAC . . . . .                            | 54        |
| 4.2.3     | Portas Universais via EAC . . . . .   | 55        |
| 4.3       | Portas controladas por $n$ -q-bits via EAC . . . . .                        | 56        |
| 4.4       | Computação Adiabática Probabilística . . . . .                              | 58        |
| <b>II</b> | <b>Computação Quântica Superadiabática</b>                                  | <b>60</b> |
| <b>5</b>  | <b>Atalho para Adiabaticidade</b>   | <b>61</b> |
| 5.1       | O Hamiltoniano contra-diabático . . . . .                                   | 61        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.2      | Complementaridade Energia-Tempo em Evoluções Superadiabáticas . . . . .  | 63        |
| 5.2.1    | O tempo total de evolução . . . . .                                      | 63        |
| 5.2.2    | Custo energético . . . . .   | 65        |
| <b>6</b> | <b>Computação Quântica Universal via TQ Superadiabático</b>              | <b>68</b> |
| 6.1      | TQ Superadiabático . . . . .   | 68        |
| 6.2      | TQ Superadiabático de portas . . . . .                                   | 70        |
| 6.3      | Complementaridade Energia-Tempo . . . . .                                | 70        |
| <b>7</b> | <b>Evoluções Superadiabáticas Controladas e CQ Universal</b>             | <b>73</b> |
| 7.1      | Evoluções Superadiabáticas Controladas . . . . .                         | 73        |
| 7.2      | Computação Quântica por Evoluções Superadiabáticas Controladas . . . . . | 76        |
| 7.2.1    | Portas de 1 q-bit via ESC . . . . .                                      | 76        |
| 7.2.2    | Portas $n$ -controladas via ESC . . . . .                                | 77        |
| 7.3      | A complementaridade energia-tempo . . . . .                              | 77        |
| 7.4      | Computação Superadiabática Probabilística . . . . .                      | 80        |
| <b>8</b> | <b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>                                 | <b>83</b> |
| <b>A</b> | <b>Apêndice A: Lema de Riemann-Lebesgue</b>                              | <b>85</b> |
| <b>B</b> | <b>Apêndice B: Prova da Proposição 2</b>                                 | <b>86</b> |
| <b>C</b> | <b>Apêndice C: Limite de Velocidade Quântica</b>                         | <b>87</b> |
| <b>D</b> | <b>Apêndice D: Prova do Teorema 1</b>                                    | <b>90</b> |
| <b>E</b> | <b>Apêndice E: Prova da Proposição 3</b>                                 | <b>91</b> |
| <b>F</b> | <b>Apêndice F: Prova do Teorema 2</b>                                    | <b>93</b> |
| <b>G</b> | <b>Apêndice G: Prova da Eq. (176)</b>                                    | <b>94</b> |

## Lista de Tabelas

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Correções do Bob para o TQ de um estado desconhecido . . . . . | 26 |
| 2 | Correções do Bob para o TQ via circuitos . . . . .             | 28 |
| 3 | Correções do Bob para o TQ de portas . . . . .                 | 29 |

## Lista de Figuras

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | (a) Porta CNOT onde o q-bit de controle deve ser inserido na parte superior e o alvo na parte inferior. (b) Porta Hadamard. (c) Porta $\pi/8$ . (d) Porta Toffoli, onde os dois primeiros q-bits são os q-bits controle e o ultimo é o q-bit alvo. . .   | 17 |
| 2  | Formas circuitais das portas elementares $X, Y$ e $Z$ que são representadas pelas matrizes de Pauli. . . . .   | 18 |
| 3  | Esquema do circuito que implementa o TQ de um estado quântico qualquer. A seção do circuito indicado com um retângulo tracejado é o responsável por simular uma medida de Bell. . . . .  | 27 |
| 4  | Circuito para implementar portas via TQ. O recurso deve ser fornecido por Charlie para Alice e Bob. Tal recurso é um estado de Bell "rodado" $ \beta_{00}\rangle_U = \mathbb{1} \otimes U \beta_{00}\rangle$ , onde $U$ é a porta que deve ser implementada ao final do processo na partícula do Bob. . . . .  | 28 |
| 5  | Circuito para implementar a porta CNOT via TQ. Em analogia com o TQ de portas de 1 q-bit, a porta CNOT que atuaria ao final do processo, deve atuar no início como mostra o circuito. As linhas tracejadas são informações clássicas (um bit) que implicam na atuação da correspondente porta se o bit for 1. As correções feitas pelo Bob dependem do conjunto de informações $x_1, x_2, y_1, y_2$ , e estão indicadas pelo retângulo vermelho tracejado. . . . . | 30 |
| 6  | Esquema do estado final e inicial do protocolo de TQ adiabático do estado de um q-bit. Inicialmente a partícula 1 em posse da Alice devem conter o estado $ \psi\rangle$ a ser teleportado, e ao final do processo a partícula 3 em posse do Bob estará no estado $ \psi\rangle$ . . . . .   | 31 |
| 7  | Esquema do estado final e inicial do protocolo de TQ adiabático. Inicialmente as partículas 1 e 2 em posse da Alice devem conter o estado $ \psi_2\rangle$ a ser teleportado, e ao final do processo as partículas 5 e 6 em posse do Bob estarão no estado $ \psi_2\rangle$ . . . . .  | 36 |
| 8  | Esquema ilustrando o estado final e inicial do TQ adiabático de $n$ q-bits. Cada setor é composto por 3 q-bits. Inicialmente ( $t = 0$ ) o estado a ser teleportado deve ser preparado nos $n$ da primeira fila (sistema em vermelho) e o canal quântico recurso é dado por $n$ pares de Bell (sistema em azul). Ao final do processo ( $t = \tau$ ) o estado $ \psi_n\rangle$ foi teleportado para as partículas do Bob. . . . .                                  | 42 |
| 9  | Gráfico da quantidade $\Sigma_{sing}(\tau)$ para algumas interpolações específicas (curvas com figuras geométricas preenchidas). As linhas horizontais estão indicando o custo energético no limite de tempo adiabático $\tau \rightarrow \infty$ . . . . .  | 71 |
| 10 | Custo energético em unidades de $\hbar\omega$ como uma função de $\omega\tau$ para diferentes valores do parâmetro $\theta_0$ . . . . .  | 79 |

- 11 Gráfico de  $\theta_0^{\min}$  em função da quantidade  $\omega\tau$  determinado numericamente com precisão de  $10^{-5}$  onde variamos a quantidade  $\omega\tau$  em intervalos de  $10^{-6}$ . Nós mostramos  $\theta_0^{\min}$  em função da quantidade  $\omega\tau$  para valores de  $\omega\tau > 1$ . Podemos ver que a medida que a quantidade  $\omega\tau$  cresce, o valor de  $\theta_0^{\min}$  se aproxima de  $\pi$  (linha horizontal tracejada em preto). No inset nós mostramos o gráfico das mesmas quantidades onde o intervalo de valores de  $\omega\tau$  são tais que  $0 \leq \omega\tau \leq 1$ . 81

# 1 Introdução

Na primeira metade da década de 80 iniciava-se a elaboração dos fundamentos que sustentam a pesquisa em computação quântica (CQ), graças aos trabalhos de Paul Benioff [1, 2], Richard Feynman [3] e David Deutsch [4]. A partir desses trabalhos, o sonho do computador quântico tem sido buscado devido a sua capacidade teórica de resolver certas classes de problemas muito mais rápido que um computador clássico. Exemplos como o algoritmo de Grover [5, 6] para busca de itens marcados em uma lista desordenada, o algoritmo de Deutsch-Jozsa [7] para verificação de funções constantes ou balanceadas e o algoritmo de Shor [8], também conhecido como algoritmo quântico de fatoração, tem ilustrado de forma clara o potencial esperado de um computador quântico. Fenômenos característicos da mecânica quântica como emaranhamento e superposição, são os responsáveis por tal vantagem [9]. Nesse cenário, modelos distintos que nos possibilitam realizar CQ vêm sendo propostos.

O modelo padrão de CQ é chamado de *Modelo de Circuitos* [10]. A ideia do modelo de circuitos é representar o processo de computação através de uma sequência de portas lógicas quânticas (transformações unitárias em mecânica quântica). Um exemplo de porta quântica que tem um análogo em computação clássica é a porta NOT, cuja ação inverte o bit de entrada de  $0 \rightarrow 1$  ou  $1 \rightarrow 0$ , que tem como análogo quântico a porta quântica representada pelo operador de Pauli  $\sigma_x$ , que ao atuar em um estado de spin  $-\frac{1}{2}$  na direção  $z$  inverte o estado de  $|+\frac{1}{2}\rangle \rightarrow |-\frac{1}{2}\rangle$  e de  $|-\frac{1}{2}\rangle \rightarrow |+\frac{1}{2}\rangle$ . Em geral, em CQ, os estados de um sistema de dois níveis são representados pelos estados abstratos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , que são os chamados *estados da base computacional*. Fisicamente esses estados podem ser representados por estados ortogonais de qualquer sistema quântico de dois níveis de energia (estados de polarização vertical e horizontal de fótons, estados de spin do elétron, etc.). Por outro lado, existem portas exclusivas da CQ, como a porta Hadamard, onde sua atuação leva estados da base computacional em superposições desses estados e vice-versa. Uma característica comum entre CQ e computação clássica são os chamados *conjuntos de portas universais para computação* [10]. Esses conjuntos são assim chamados devido ao fato de seus elementos poderem ser combinados para realizar qualquer porta lógica de um circuito.

Um outro esquema universal de CQ é a CQ adiabática [11]. Esse modelo nos permite idealizar, quando combinado com o modelo de circuitos, novos modelos híbridos de CQ, os quais serão o grande foco de discussão nessa dissertação. A ideia fundamental da CQ adiabática é fazer uso do teorema adiabático [12–14] para realizar computação quântica analógica, através de um Hamiltoniano que evolui o sistema continuamente no tempo a partir de um estado fundamental instantâneo simples em um instante inicial até um estado fundamental instantâneo final que contem a solução do problema. Em particular, CQ adiabática é equivalente ao modelo de circuitos a menos de recursos polinomiais [15, 16] e exhibe propriedades de tolerância a erros sob decoerência [17, 18]. Realizações experimentais iniciais de CQ adiabática foram originalmente propostas em Ressonância Magnética Nuclear (RMN), onde algoritmos quânticos como o Algoritmo de Busca [19, 20] e o Algoritmo de Deutsch-Jozsa [21], foram implementados.

Mais recentemente, outras arquiteturas também têm sido usadas para implementar CQ adiabática como, por exemplo, íons armadilhados [22] e q-bits supercondutores [23–27]. Um dos obstáculos encontrados em CQ adiabática é o tempo requerido para a evolução do sistema imposto pelas condições de validade do teorema adiabático [28–31]. Isso implica que em modelos híbridos, onde usamos evoluções adiabáticas para simular circuitos quânticos, cada porta do circuito deve ser implementada em um tempo suficientemente grande (com relação a quantidades que dependem do *gap* de energia relativo ao estado fundamental do Hamiltoniano que governa sistema). Tal fato é um problema quando a inevitável interação entre o computador quântico e o ambiente que o cerca é levado em consideração, devido efeitos que levam sistemas quânticos à decoerência antes de finalizada a computação [32]. Uma maneira de tratar esse problema é através da introdução de *atalhos para a adiabaticidade*.

A ideia de métodos que nos permitam imitar uma evolução adiabática foi primeiro proposto por M. V. Berry em 1987 [33] e desde então outros trabalhos relevantes sobre o tema vem surgindo [34–36]. A ideia central de atalhos para adiabaticidade é reproduzir exatamente a evolução adiabática, mas sem o vínculo temporal imposto pelas condições de validade do teorema adiabático. Um dos principais elementos para derivarmos um atalho é a determinação de um termo chamado *Hamiltoniano contra-diabático*, ou simplesmente *termo contra-diabático*, que foi introduzido por Demirplak e Rice [37,38] e também estudado por Berry [39]. Nesses atalhos para adiabaticidade o Hamiltoniano contra-diabático, por construção, deve ser somado ao Hamiltoniano original (adiabático) do problema para definir o que chamamos de *Hamiltoniano superadiabático*, que por sua vez imita a evolução adiabática desejada. O atalho também pode ser realizado pelo método dos invariantes de Lewis-Riesenfeld [40]. O foco de interesse nessa dissertação é derivar atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos. Nessa dissertação nós derivamos tais atalhos para alguns modelos híbridos universais de CQ. Com isso, propõe-se um modelo de CQ universal superadiabática onde as evoluções propostas em CQ adiabática se mantém, mas o vínculo temporal imposto sobre tais evoluções é removido.

Essa dissertação está estruturada como segue. A primeira parte é voltada para discussão de fundamentos do teorema adiabático e de alguns modelos híbridos universais de CQ que fazem uso do teorema adiabático para simular o funcionamento de qualquer circuito quântico. Iniciamos nosso estudo, no capítulo 2, revisando brevemente o que vem a ser o teorema adiabático e fazendo uma análise de suas condições de validade. Em seguida, no capítulo 3, nós faremos a primeira aplicação do teorema adiabático em modelos híbridos de CQ universal, proposto por D. Bacon e S. Flammia [41]. Como tal aplicação necessita de conhecimentos prévios sobre teleporte quântico (TQ) de estados desconhecidos de um q-bit, nós revisaremos os resultados referente ao TQ na seção 3.1 e como o TQ pode ser usado como um primitivo para CQ na seção 3.2. Dando continuidade, na seção 3.3 o foco principal é mostrar que o TQ adiabático pode ser usado como um primitivo para realizar CQ universal. Para este fim, aplica-se o teorema adiabático para mostrar como podemos teleportar adiabaticamente um estado desconhecido de um q-bit, na subseção 3.3.1, e como este resultado pode ser usado para implementar portas de

um q-bit, discutido na subseção 3.3.4. As subseções 3.3.5 e 3.3.6, são destinadas a generalizar os resultados do teleporte adiabático de portas de um q-bit para implementar portas de  $n$  q-bits. Ainda com o objetivo de estudar modelos de CQ adiabática, nós estudamos no capítulo 4 um outro modelo que nos permite realizar CQ universal usando o conceito de evoluções adiabáticas controladas (EAC), proposto por Itay Hen [42]. As seções 4.1 e 4.2 revisam os resultados obtidos em [42]. Nós também generalizamos os resultados obtidos na Ref. [42] e mostramos que EAC podem ser usadas para implementar qualquer rotação (porta) controlada por  $n$  q-bits, como será discutido na seção 4.3.

A segunda parte desta dissertação é dedicada a introduzir as contribuições originais dessa dissertação, as quais foram publicadas nas Refs. [43, 44]. O capítulo 5 carrega, na seção 5.1, uma revisão sobre atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos e, na seção 5.2, o estudo acerca da complementaridade energia-tempo em evoluções superadiabáticas. No capítulo 6 mostramos como implementar CQ Superadiabática. Na seção 6.1 nós derivamos um atalho para o TQ adiabático proposto na Ref. [41] e mostramos como o conhecimento do Hamiltoniano contra-diabático associado ao TQ Superadiabático do estado de um q-bit pode ser útil na extensão do protocolo para teleportar o estado de  $n$  q-bits. Em seguida, na seção 6.2, mostramos como realizar CQ universal com o TQ Superadiabático. Para isso usamos alguns novos teoremas demonstrados nos Apêndices desta dissertação e que se aplicam em evoluções superadiabáticas em geral. Por fim, a análise da complementaridade energia-tempo para o TQ Superadiabático é feita na seção 6.3. No capítulo 7 nós propomos um modelo alternativo de CQ Superadiabática. Isso é possível derivando um atalho para EAC de forma genérica na seção 7.1 e aplicando os resultados para mostrar como evoluções superadiabáticas controladas (ESC) podem ser usadas para realizar CQ universal. Na seção 7.2 discutimos acerca do principal resultado do capítulo 7, onde nós mostramos como implementar portas  $n$ -controladas de 1 q-bit usando ESC a partir de um Hamiltoniano contra-diabático *independente* do tempo. Na seção 7.3 analisamos a performance de tal modelo, onde nós analisamos a complementaridade energia-tempo para o Hamiltoniano Superadiabático em ESC e mostramos sua dependência com um parâmetro  $\theta_0$  que modula a probabilidade de sucesso da computação. Como uma derivação do modelo proposto, na seção 7.4, nós fazemos um breve estudo sobre QC probabilística via ESC, onde mostramos que, em média, energeticamente é mais vantajoso realizarmos QC probabilística e não a CQ determinística.

Encerramos esta dissertação apresentando, no capítulo 8, as conclusões obtidas ao final da execução do projeto que deu origem a este trabalho. Também discutimos brevemente sobre as possíveis extensões desse projeto mencionando as perspectivas futuras.



## 1.1 Notação

A base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  é adotada aqui, na forma matricial, como

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Como em muitos momentos lidaremos com sistemas de partículas, precisaremos adotar rótulos para as mesmas de modo a não haver nenhuma confusão. O estado  $|\Psi\rangle$  de um sistema de  $n$  partículas, cujo estado individual é  $|\psi_i\rangle$ , é dado pelo produto tensorial

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle_n, \quad (2)$$

onde muitas vezes pode ser representado por  $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2 \cdots |\psi_n\rangle_n$  ou  $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \cdots |\psi_n\rangle$ . A ultima notação só será adotada se dispormos o sistema na sequência  $1, 2, \dots, n$ ; nos casos onde nos referirmos apenas a parte do sistema nós usaremos a notação  $|\Psi\rangle_{jnm} = |\psi_j\rangle_j |\psi_n\rangle_n |\psi_m\rangle_m$ , por exemplo. Quando for conveniente, usaremos sempre a notação formal da Eq. (2) para representar o estado do sistema.

A notação para produtos tensoriais entre operadores é convencionada da mesma forma como feito para estados. Salvo casos particulares onde a notação formal entre produtos tensoriais de operadores  $A_i$ ,

$$A = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n, \quad (3)$$

se aplica, nós usaremos o produto acima sob a forma  $A = A_1 A_2 \cdots A_n$ . Deve-se atentar para a diferença na representação de produtos tensoriais e produtos matriciais. Os produtos matriciais de operadores  $B_k$  atuando sobre um estado  $|\psi_i\rangle$  serão representados por

$$B = B_1 \cdot B_2 \cdots B_n, \quad (4)$$

ou equivalentemente por  $B = B_1 B_2 \cdots B_n$ . Para diferenciar essa ultima notação da notação adotada para o produto tensorial, sempre representaremos o produto matricial entre dois operadores, que atuam sobre um mesmo estado  $|\psi_i\rangle$ , entre parênteses como  $B_1 \cdot B_2 \cdots B_n = (B_1 B_2 \cdots B_n)_i$ . A notação  $B = B_1 B_2 \cdots B_n$  será apenas usada em situações onde não haverá possibilidade de alguma interpretação errada.

Outras notações podem surgir quando necessárias. Nesses casos especiais para que não exista qualquer ambiguidade na notação, durante o desenvolvimento dessa dissertação nós sempre indicaremos as notações que estão sendo usadas. Quando não, valerão as notações acima indicadas.

## 1.2 Portas Elementares em Computação Quântica

Assim como em computação clássica, nós temos um conjunto de portas elementares em CQ [9]. Dentro desse conjunto de portas elementares, nós podemos identificar subconjuntos de portas que podem ser usados para construir os chamados *conjuntos universais de portas quânticas*. Por definição esses conjuntos são compostos por portas elementares que podem ser combinadas de tal maneira que nos permite simular o funcionamento de qualquer porta de um circuito quântico. Exemplos desses conjuntos são os conjuntos  $\{CNOT + \text{Rotações de 1 q-bit}\}$  [10] e o conjunto  $\{\text{Toffoli, Hadamard}\}$  [45,46]. Além disso, existem conjuntos de portas que permitem universalidade *aproximada*, como o conjunto  $\{CNOT + \text{Hadamard} + \text{porta } \frac{\pi}{8}\}$  [47].

As portas mencionadas acima, e que tem importância para essa dissertação, são as portas  $CNOT$ , Hadamard, porta  $\frac{\pi}{8}$  e Toffoli. Abaixo seguem suas representações matriciais (escritas na base computacional)

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\pi}{8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix},$$

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Seguem ainda suas representações circuitais, as quais são descritas na Fig. 1.

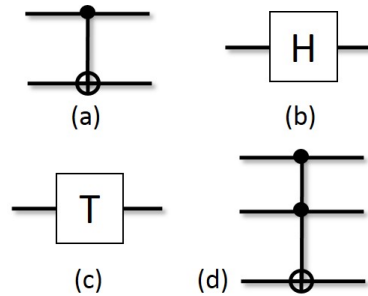


Figura 1: (a) Porta CNOT onde o q-bit de controle deve ser inserido na parte superior e o alvo na parte inferior. (b) Porta Hadamard. (c) Porta  $\pi/8$ . (d) Porta Toffoli, onde os dois primeiros q-bits são os q-bits controle e o ultimo é o q-bit alvo.

Além das portas acima, também temos as portas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  que são representadas pelas

matrizes de Pauli

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

escritas na base computacional e onde suas formas circuitais são representadas na Fig. 2.

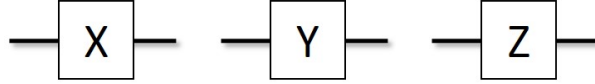


Figura 2: Formas circuitais das portas elementares  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  que são representadas pelas matrizes de Pauli.

Desta forma os estados da base computacional são autoestados de  $Z$  de modo que a relação de autovalor

$$Z|n\rangle = (-1)^n |n\rangle, \quad (6)$$

para  $n = \{0, 1\}$  é satisfeita.

## Parte I

# Computação Quântica Adiabática

Nesta primeira parte nós estudaremos alguns elementos do Teorema Adiabático, bem como suas condições de validade, que serão necessários para o desenvolvimento de nossa investigação. O capítulo 2 é inteiramente dedicado a discussão sobre fundamentos da dinâmica adiabática em sistemas quânticos fechados, bem como algumas condições que devem ser obedecidas para que o teorema adiabático seja obedecido.

No capítulo 3 nós discutimos sobre o TQ [48] e sua aplicação em CQ universal. Assim, nas seções 3.1 e 3.2 nós revisamos elementos relacionados ao TQ e como usá-lo como um primitivo para CQ universal [49]. Em seguida, mostramos como realizar o TQ adiabaticamente, para isso discutiremos os principais resultados obtidos por D. Bacon e S. Flammia na Ref. [41]. Em seu trabalho, Bacon e Flammia mostraram que o TQ adiabático pode ser usado também como primitivo para CQ adiabática e para demonstrar isso eles fazem uso da definição de *q-bits lógicos e operadores lógicos*. Aqui nós executaremos a mesma tarefa que Bacon e Flammia, mas de uma forma diferente, usando as simetrias do Hamiltoniano adiabático. Assim como feito na Ref. [41], mostraremos que podemos realizar CQ universal via TQ adiabático. A forma como tratamos o problema será de grande utilidade ao mostrarmos como generalizar os resultados do Bacon e Flammia para realizar o TQ adiabático de estados gerais de  $n$  q-bits. Além disso, mostraremos como o uso de simetrias do Hamiltoniano facilita a forma como tratamos o TQ adiabático como um primitivo para CQ.

Ainda com o objetivo de realizar CQ universal adiabática, nós estudamos no capítulo 4 um outro modelo que nos permite implementar portas quânticas adiabaticamente. Usando o conceito de evoluções adiabáticas controladas (EAC), Itay Hen propôs um modelo universal de CQ [42]. Na seção 4.2 nós mostramos como EAC pode ser usada para implementar portas de 1 q-bit e portas controladas por 1 q-bit. Na seção 4.3 nós estendemos os resultados apresentados na seção 4.2 e oferecemos um modelo que nos permite implementar portas controladas por  $n$  q-bits usando EAC com o recurso mínimo de 1 ancilla.

## 2 Teorema Adiabático

A todo tempo em dinâmica nos preocupamos em determinar como um sistema evolui quando sujeito a ação de campos e/ou forças externas. A ação desses campos e/ou forças externas é quem vai impor o nível dificuldade na hora de resolver as equações de movimento. Em mecânica quântica, quando deixamos um sistema quântico evoluir segundo um Hamiltoniano  $H(t)$ , a sua dinâmica é ditada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad , \quad (7)$$

que em geral resulta em um sistema de equações diferenciais acopladas com coeficientes que podem, ou não, depender do tempo. Como o objetivo é encontrar a solução  $|\psi(t)\rangle$  para um dado Hamiltoniano  $H(t)$ , isso pode muitas vezes ser um problema. Afim de resolver o problema de encontrar a solução  $|\psi(t)\rangle$  da Eq. (7), no caso mais geral possível, a série de Dyson é a solução [50]. Em geral a evolução de um sistema quântico pode ser tão complicada quanto possamos imaginar, onde transições entre diferentes níveis de energia podem ocorrer. Porém, é possível controlar o sistema de modo que o mesmo evolua sempre em um nível de energia bem determinado fazendo uso do o teorema adiabático e da noção de evoluções adiabáticas. Assim, deixe-nos definir o que vem a ser uma evolução adiabática.

**Definição 1** *Seja um sistema quântico governado por um Hamiltoniano arbitrário dependente do tempo. Nesse cenário, uma evolução é dita adiabática quando os autoestados associados a níveis de energia distintos do Hamiltoniano que governa o sistema evoluem independentes uns dos outros.*

Em outras palavras, em uma *evolução adiabática* se o sistema é preparado inicialmente em um autoestado  $|E_n(t_0)\rangle$  do Hamiltoniano  $H(t = t_0)$ , então em um tempo  $t$  posterior o sistema terá evoluído para o correspondente autoestado  $|E_n(t)\rangle$  de  $H(t)$ , onde durante a evolução não há nenhuma transição entre níveis de energia diferentes do nível de energia associado a  $|E_n(t)\rangle$  e  $|E_n(t_0)\rangle$ . Um ponto importante é que uma evolução adiabática não garante que teremos o sistema sempre evoluindo com a mesma energia ( $\epsilon_n(t_0) = \epsilon_n(t_1)$ ), afinal o Hamiltoniano é dependente do tempo, mas o que se garante é que os subespaços compostos por autoestados associados a níveis de energia diferente evoluem independentemente, assim não há transições entre *níveis* de energia durante a evolução.

A adiabaticidade não é um fenômeno que pode ser visto em qualquer evolução, mas existem casos onde podemos garantir que a adiabaticidade é verificada. Certos disso, nos perguntamos: poderiam existir condições sobre alguma entidade física do sistema de modo que a adiabaticidade seja garantida?

## 2.1 Teorema Adiabático: Condição sobre o Hamiltoniano

Nosso ponto de partida é a equação de Schrödinger (7) para um Hamiltoniano dependente do tempo não-degenerado  $H(t)$ . Sem perda de generalidade deixe-nos expandir o estado evoluído  $|\psi(t)\rangle$ , que seja solução da Eq. (7), na base de autoestados instantâneos de  $H(t)$  como segue

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \varepsilon_n(\tau)} |E_n(t)\rangle, \quad (8)$$

onde  $\varepsilon_n(t)$  e  $|E_n(t)\rangle$  satisfazem

$$H(t) |E_n(t)\rangle = \varepsilon_n(t) |E_n(t)\rangle, \quad (9)$$

com  $\varepsilon_n(t)$  compondo o espectro não-degenerado de  $H(t)$ . A forma como escrevemos o estado evoluído na Eq. (8) deixa livre que  $c_n(t)$  carregue qualquer informação sobre fases geométricas consequentes da evolução. Se substituirmos a forma do estado evoluído da Eq. (8) na Eq. (7) nós podemos mostrar que para um coeficiente  $c_k(t)$  nós temos a seguinte dinâmica

$$\dot{c}_k(t) = - \sum_n c_n(t) \langle E_k(t) | \dot{E}_n(t) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau g_{nk}(\tau)}, \quad (10)$$

onde definimos  $g_{nk}(t) = \varepsilon_n(t) - \varepsilon_k(t)$ . A quantidade  $g_{nk}(t)$  representa o *gap* de energia entre os níveis de energia  $n$  e  $k$  no instante de tempo  $t$ . Nós ainda podemos escrever

$$\dot{c}_k(t) = -c_k(t) \langle E_k(t) | \dot{E}_k(t) \rangle - \sum_{n \neq k} c_n(t) \langle E_k(t) | \dot{E}_n(t) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau g_{nk}(\tau)}. \quad (11)$$

Escrevendo  $\dot{c}_k(t)$  como na Eq. (11) fica mais claro que a soma sobre todo  $n \neq k$  é responsável por acoplar o sistema de equações diferenciais. Note que ainda podemos escrever

$$\dot{c}_k(t) = -c_k(t) \langle E_k(t) | \dot{E}_k(t) \rangle - \sum_{n \neq k} c_n(t) \frac{\langle E_k(t) | \dot{H}(t) | E_n(t) \rangle}{g_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau g_{nk}(\tau)}, \quad (12)$$

se usarmos a relação

$$\langle E_k(t) | \dot{E}_n(t) \rangle = \frac{\langle E_k(t) | \dot{H}(t) | E_n(t) \rangle}{g_{nk}(t)}, \text{ para } n \neq k. \quad (13)$$

Note que esta relação somente é válida para  $n \neq k$  no caso não-degenerado, já no caso degenerado ela é válida apenas quando  $\varepsilon_n(t) \neq \varepsilon_k(t)$ , mas mesmo assim ainda podemos escrever para o caso degenerado

$$\dot{c}_k(t) = - \sum_{g_{nk}=0} c_k(t) \langle E_n(t) | \dot{E}_k(t) \rangle - \sum_{g_{nk} \neq 0} c_n(t) \frac{\langle E_k(t) | \dot{H}(t) | E_n(t) \rangle}{g_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau g_{nk}(\tau)}, \quad (14)$$

onde  $\sum_{g_{nk}=0}$  ( $\sum_{g_{nk}\neq 0}$ ) representa uma soma sobre todos os valores de  $n$  tais que  $g_{nk}(t) = 0$  ( $g_{nk}(t) \neq 0$ ), que necessariamente implica em  $\varepsilon_n(t) = \varepsilon_k(t)$  ( $\varepsilon_n(t) \neq \varepsilon_k(t)$ ). Mas esse não é o caso aqui considerado. Dando continuidade da Eq. (12), nós chegamos a uma condição quantitativa para a adiabaticidade.

**Condição 1 (Condição sobre o Hamiltoniano do sistema)** *Seja um Hamiltoniano dependente do tempo  $H(t)$ . Então se  $\forall (k, n)$  vale*

$$\max_{t \in (0, T)} \left| \frac{\langle E_k(t) | \dot{H}(t) | E_n(t) \rangle}{g_{nk}(t)} \right| < 1 \quad , \quad (15)$$

onde  $T$  é o tempo total de evolução, a evolução do sistema pode ser descrita pela aproximação adiabática.

Ainda existem certas divergências sobre os critérios de validade do teorema adiabático. Existem muitos estudos, teóricos e experimentais, na literatura sobre condições de validade do teorema adiabático e destacamos alguns que julgamos relevantes nas Refs. [51–55]. Diante disto, em nossa análise, adotaremos situações em que as condições desenvolvidas aqui são suficientes para garantir que o teorema adiabático é obedecido.

Dessa forma, da Eq. (12) nós ficamos com

$$\dot{c}_k(t) \approx -c_k(t) \langle E_k(t) | \dot{E}_k(t) \rangle \quad , \quad (16)$$

e consequentemente obtemos como solução  $c_k(t) \approx c_k(0) e^{i\gamma_k(t)}$ , onde

$$\gamma_k(t) = i \int_0^t \langle E_k(\tau) | \dot{E}_k(\tau) \rangle d\tau \quad (17)$$

é a fase de Berry [56]. Uma vez que encontramos que  $c_k(t) \approx c_k(0) e^{i\gamma_k(t)}$  e que cada coeficiente evolui de forma independente, se considerarmos que inicialmente o sistema se encontrava no estado de energia  $\varepsilon_n(0)$  de  $H(t)$ , então  $c_n(0) = 1$  e portanto devemos ter o estado do sistema evoluindo aproximadamente segundo a equação

$$|\psi(t)\rangle \approx e^{-\int_0^t \langle E_k(\tau) | \dot{E}_k(\tau) \rangle d\tau} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \varepsilon_n(\tau)} |E_n(t)\rangle \quad , \quad (18)$$

que é a solução para uma evolução adiabática. A condição sobre o Hamiltoniano do sistema nos diz basicamente que se o Hamiltoniano varia muito lentamente durante a evolução do sistema, então nós temos uma boa aproximação da evolução adiabática.

## 2.2 Teorema Adiabático: Condição sobre o tempo de evolução

Uma outra forma de analisar a consistência do teorema adiabático é analisando o tempo total de evolução do sistema. Para mostrar como isso pode ser feito, deixe-nos retornar a Eq. (12), mas

primeiro note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [c_k(t) e^{-i\gamma_k(t)}] &= e^{-i\gamma_k(t)} [\dot{c}_k(t) - i\dot{\gamma}_k(t) c_k(t)] , \\ &= e^{-i\gamma_k(t)} [\dot{c}_k(t) + \langle E_k(\tau) | \dot{E}_k(\tau) \rangle c_k(t)] ,\end{aligned}$$

e portanto podemos reescrever a Eq. (12) como

$$\frac{d}{dt} [c_k(t) e^{-i\gamma_k(t)}] = - \sum_{n \neq k} c_n(t) e^{-i\gamma_k(t)} \frac{\langle E_k(t) | \dot{H}(t) | E_n(t) \rangle}{g_{nk}(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau g_{nk}(\tau)} . \quad (19)$$

Agora nós usamos um parâmetro  $s$  tal que  $s = t/T$  para escrever

$$\frac{d}{ds} [c_k(s) e^{-i\gamma_k(s)}] = - \sum_{n \neq k} c_n(s) e^{-i\gamma_k(s)} \frac{\langle E_k(s) | H'(s) | E_n(s) \rangle}{g_{nk}(s)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^s d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} , \quad (20)$$

com  $\gamma_k(s) = i \int_0^s \langle E_k(\varsigma) | E'_k(\varsigma) \rangle d\varsigma$ , onde a derivada com relação a variável independente de uma função  $f$  é denotada por "'", isto é,  $f'(\xi) = df(\xi)/d\xi$ . Redefinindo a variável independente acima com a mudança  $s \mapsto \xi$  e fazendo a integração em ambos os lados da equação acima em  $\xi \in I : [0, s]$ , nós obtemos

$$c_k(s) e^{-i\gamma_k(s)} = c_k(0) - \sum_{n \neq k} \int_0^s d\xi c_n(\xi) e^{-i\gamma_k(\xi)} \frac{\langle E_k(\xi) | H'(\xi) | E_n(\xi) \rangle}{g_{nk}(\xi)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} , \quad (21)$$

onde nós usamos, do lado esquerdo, o teorema fundamental do cálculo onde  $\int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = f(x_2) - f(x_1)$  [57]. Por simplicidade, definimos

$$F_{nk}(s) = c_n(s) e^{-i\gamma_k(s)} \langle E_k(s) | H'(s) | E_n(s) \rangle , \quad (22)$$

para escrever

$$c_k(s) e^{-i\gamma_k(s)} = c_k(0) - \sum_{n \neq k} \int_0^s d\xi \frac{F_{nk}(\xi)}{g_{nk}(\xi)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} . \quad (23)$$

O integrando na equação acima pode ser também escrito como

$$\frac{F_{nk}(\xi)}{g_{nk}(\xi)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} = \frac{i}{T} \left[ \frac{d}{d\xi} \left( \frac{F_{nk}(\xi)}{g_{nk}^2(\xi)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} \right) - e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{F_{nk}(\xi)}{g_{nk}^2(\xi)} \right) \right] . \quad (24)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (23) nós ficamos com

$$c_k(s) e^{-i\gamma_k(s)} = c_k(0) - \frac{i}{T} \sum_{n \neq k} \left[ \frac{F_{nk}(s)}{g_{nk}^2(s)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^s d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} - \frac{F_{nk}(0)}{g_{nk}^2(0)} - \int_0^s d\xi e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\varsigma g_{nk}(\varsigma)} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{F_{nk}(\xi)}{g_{nk}^2(\xi)} \right) \right] . \quad (25)$$

Todo esse algebrismo matemático tem a finalidade de tentar encontrar condições sobre algum parâmetro de modo que possamos ter uma evolução do coeficiente  $c_k(s)$  independente dos



demais. Na equação acima nós podemos notar que esse objetivo é alcançado se a somatória puder ser ignorada com relação ao coeficiente  $c_k(0)$ . Um primeiro passo é fazer uso do Lema de Riemann-Lebesgue para escrever que [58]

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^s d\xi e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\xi d\zeta g_{nk}(\zeta)} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{F_{nk}(\xi)}{g_{nk}^2(\xi)} \right) \rightarrow 0 . \quad (26)$$

Uma demonstração simplificada do Lema de Riemann-Lebesgue encontra-se no Apêndice A. Assim, nesse limite nós temos apenas

$$c_k(s) e^{-i\gamma_k(s)} = c_k(0) - \frac{i}{T} \sum_{n \neq k} \left( \frac{F_{nk}(s)}{g_{nk}^2(s)} e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^s d\zeta g_{nk}(\zeta)} - \frac{F_{nk}(0)}{g_{nk}^2(0)} \right) , \quad (27)$$

O uso do Lema de Riemann-Lebesgue na Eq. (26) e a relação acima mostram que se o tempo total de evolução for suficientemente grande, então podemos ter uma quase desacoplada evolução dos coeficientes  $c_n(s)$ . Mas quão grande deve ser o tempo total de evolução? A resposta para essa questão emerge diretamente da equação acima e chegamos a mais uma condição para adiabaticidade.

**Condição 2 (O tempo total de evolução adiabática)** *O tempo total de evolução adiabática deve satisfazer*

$$T \gg \max_{s \in [0,1]} \left| \frac{F_{nk}(s)}{g_{nk}^2(s)} \right| ,$$

onde essa estimativa deve ser feita sobre todos os valores de  $k$  e  $n$ .

Se a condição acima é satisfeita, então nós temos  $c_n(s) = c_n(0) e^{i\gamma_n(s)}$ , que dá origem a solução adiabática determinada na Eq. (18). Assim, escrevemos que

$$T \gg \max_{s \in [0,1]} \left| \frac{\langle E_k(s) | H'(s) | E_n(s) \rangle}{g_{nk}^2(s)} \right| . \quad (28)$$

Essa é condição *sobre o tempo total de evolução do sistema*, que denominaremos agora em diante de *vínculo temporal* imposto pelo teorema adiabático. Além dessas condições mencionadas aqui, tem sido estudado *bounds* para a aproximação adiabática na intenção de dar mais suporte para que possamos entender melhor os critérios suficientes para uma boa aproximação adiabática. Uma leitura sobre limites para adiabaticidade pode ser encontrado na Ref. [59], bem como sua generalização na Ref. [60].

### 3 Computação Quântica Universal via Teleporte Quântico Adiabático

O teleporte quântico [48], proposto em 1993 por Bennett *et al.*, constitui um canal para enviar informação codificada em um estado quântico desconhecido. O principal resultado do TQ é que, além de não ser necessário conhecer o estado a ser teleportado, não há qualquer limite para a distância entre os agentes (exceto pelo canal clássico que deve ser estabelecido entre eles). Experimentos recentes para implementação de TQ atingiram a marca dos 100 km com fibras ópticas [61] e 143 km no espaço livre [62]. No final do século passado, mais precisamente em 1999, Gottesman e Chuang [49] construíram um modelo de circuito quântico em que o TQ pode ser usado como um primitivo para a CQ universal. Esse resultado abriu as portas para o trabalho do Bacon e Flammia [41], onde eles simularam adiabaticamente o circuito proposto por Gottesman e Chuang, realizando assim o TQ adiabático. Além disso, Bacon e Flammia mostraram, a partir do TQ adiabático, o conceito de TQ adiabático de portas afim de realizar CQ universal.

Neste capítulo nós discutiremos de forma detalhada os resultados mencionados acima. A ideia de simular o circuito do Gottesman e Chuang via evoluções adiabáticas proposto por Bacon e Flammia será o foco principal dessa seção. O que faremos inicialmente é uma demonstração alternativa de como o TQ adiabático acontece (para demonstração original usando q-bits lógicos, veja [41]). Com isso, nós estendemos o modelo do Bacon e Flammia e mostramos que podemos usar o modelo para implementar qualquer unitário de  $n$ -q-bits.

#### 3.1 Teleportando um estado quântico desconhecido

A ideia principal do TQ de um q-bit (ou se preferir do estado de um sistema quântico de um sistema de dois níveis) é que um *agente emissor*, chamado Alice, seja capaz de enviar a informação codificada em um estado quântico  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  para um *agente receptor*, chamado Bob. A distância entre Alice e Bob não é importante, desde que um canal clássico entre eles possa ser estabelecido (a razão disso ficará claro mais a frente). Em resumo, nosso esquema é formado por dois laboratórios (da Alice e do Bob) separados espacialmente de forma que um canal clássico de troca de informações possa ser estabelecido.

O recurso principal do TQ é um estado emaranhado do tipo estado de Bell dado por

$$|\beta_{nm}\rangle = \frac{|0n\rangle + (-1)^m |1\bar{n}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (29)$$

onde  $n, m$  assumem valores 0 e 1 e onde definimos  $\bar{n} = 1 - n$ . Esse recurso é de fundamental importância para a realização do TQ e caracteriza o que chamamos de *canal quântico* entre Alice e Bob. Assim, o canal quântico entre Alice e Bob é estabelecido quando cada um deles está em posse de uma das partículas do par emaranhado (29). Uma vez estabelecido o canal,

Tabela 1: Correções do Bob para o TQ de um estado desconhecido

| Resultado da Alice   | Correção do Bob     |
|----------------------|---------------------|
| $ \beta_{00}\rangle$ | $\sigma_z \sigma_x$ |
| $ \beta_{10}\rangle$ | $\sigma_z$          |
| $ \beta_{01}\rangle$ | $\sigma_x$          |
| $ \beta_{11}\rangle$ | $\mathbb{1}$        |

digamos que o canal quântico é o estado<sup>1</sup>  $|\beta_{11}\rangle$  (estado singleto que foi usado no trabalho original [48]), Alice deve estar de posse do estado  $|\psi\rangle$  a ser teleportado para Bob. O estado do sistema Alice-Bob é

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle &= |\psi\rangle|\beta_{11}\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \left( \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a|00\rangle_A |1\rangle_B - a|01\rangle_A |0\rangle_B + b|10\rangle_A |1\rangle_B - b|11\rangle_A |0\rangle_B) \quad , \quad (30)
 \end{aligned}$$

onde denotamos  $|jk\rangle_A$  ( $|m\rangle_B$ ) como sendo um estado das partículas da Alice (Bob). Devido a separação entre Alice e Bob, Alice não pode realizar nenhum tipo de medida na partícula do Bob, mas existe uma medida especial que Alice pode fazer em suas partículas que possibilita o TQ do estado  $|\psi\rangle$  para Bob. Em suas partículas Alice deve realizar uma medida na base de Bell, um dos estados (29). Assim, é conveniente escrever o estado do sistema numa base onde as partículas da Alice estejam escritas na base de Bell. Fazendo isso nós encontramos

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle &= \frac{1}{2} [|\beta_{11}\rangle_A (-a|0\rangle - b|1\rangle)_B + |\beta_{10}\rangle_A (-a|0\rangle + b|1\rangle)_B] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [|\beta_{01}\rangle_A (a|1\rangle + b|0\rangle)_B + |\beta_{00}\rangle_A (a|1\rangle - b|0\rangle)_B] \quad , \quad (31)
 \end{aligned}$$

onde fica claro os possíveis resultados da Alice quando ela realizar uma medida na base  $|\beta_{nm}\rangle$ . Também é óbvio que o estado, para o qual a partícula do Bob irá colapsar depois da medida realizada pela Alice, depende exclusivamente do resultado da medida da Alice. Exceto no caso onde o resultado da Alice fornece o estado  $|\beta_{11}\rangle$  em suas partículas, qualquer outro resultado não pode caracterizar o TQ, pois os possíveis estados de colapso são diferentes do estado original  $|\psi\rangle$ .

Eis agora a importância de possibilitar a troca de informação entre Alice e Bob por meio de um canal clássico. Note que, para o Bob, depois de uma medida da Alice o estado não está bem definido e pode, ou não, ser o estado que Alice desejava teleportar. Mas se a Alice informar o resultado de sua medida para o Bob, este sempre poderá agir sobre sua partícula e "recuperar" a informação que ficou embaralhada com o TQ. A Tabela 1 mostra as correções que devem ser feitas por Bob em sua partícula.

<sup>1</sup>Embora tenhamos escolhido tal estado, o protocolo aqui apresentado funciona para qualquer escolha de estado de Bell da Eq. (29).

## 3.2 Computação Quântica via TQ

Agora nós mostraremos como usar o TQ para realizar CQ universal por meio de simulações das portas quânticas. A ideia básica é, primeiramente, mostrar como podemos simular o TQ aplicando portas quânticas, ou seja, usando o modelo de circuitos.

### 3.2.1 TQ via circuitos: O Protocolo

Para diferenciar o que faremos aqui do TQ original proposto em [48], nós vamos nos referir a este como *TQ via circuitos quânticos*, ou simplesmente como *TQ via circuitos*. A ideia básica para que possamos realizar o TQ via circuitos é determinar um circuito quântico que nos permita reproduzir o processo feito em [48].

Assim, novamente partimos de um estado input sendo dado por  $|\phi\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle$ . Aqui nós usaremos  $|\beta_{00}\rangle$  para ilustrar que o TQ pode ocorrer usando qualquer um dos estados de Bell. O circuito que nos permite realizar o TQ [49, 63] é dado como na Fig. 3.

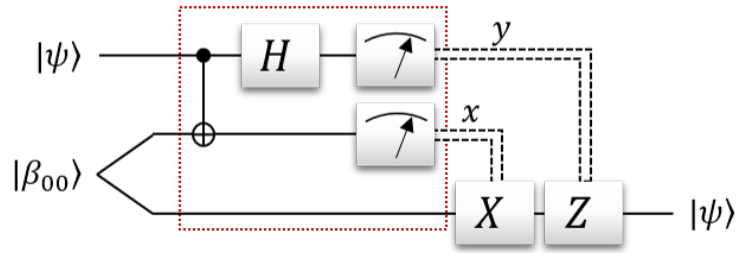


Figura 3: Esquema do circuito que implementa o TQ de um estado quântico qualquer. A seção do circuito indicado com um retângulo tracejado é o responsável por simular uma medida de Bell.

O primeiro estágio do circuito, que é todo realizado pela Alice, nada mais é do que simular uma medida na base de Bell usando um computador quântico. Isso é feito por meio da ação do circuito formado por uma CNOT e uma Hadamard dispostos como indicado na Fig. 3, e em seguida uma medida na base computacional. Note portanto que não é a medida na base computacional que, sozinha, faz o TQ, mas sim a interação entre os qbits da Alice junto com a medida na base computacional que nos permite realizar o TQ via circuitos.

Após aplicar o circuito, Alice leva o sistema do estado  $|\phi\rangle$  para um estado computado  $|\phi_C\rangle$  dado por

$$\begin{aligned} |\phi_C\rangle = & \frac{1}{2} [|00\rangle_A (a|0\rangle + b|1\rangle)_B + |01\rangle_A (a|1\rangle + b|0\rangle)_B] \\ & + \frac{1}{2} [|10\rangle_A (a|0\rangle - b|1\rangle)_B + |11\rangle_A (a|1\rangle - b|0\rangle)_B] \quad , \end{aligned} \quad (32)$$

e é nesse momento que a medida na base computacional deve ser feita sobre os q-bits da Alice. Assim como no TQ original, o TQ por circuitos também exige um canal clássico entre Alice e Bob devido o estado do sistema antes de uma medida da Alice ser dado pela Eq. (32). Na Eq.

Tabela 2: Correções do Bob para o TQ via circuitos

| Resultado da Alice | Correção do Bob    |
|--------------------|--------------------|
| $ 00\rangle$       | $\mathbb{1}$       |
| $ 01\rangle$       | $\sigma_x$         |
| $ 10\rangle$       | $\sigma_z$         |
| $ 11\rangle$       | $\sigma_z\sigma_x$ |

(32) nós podemos ver claramente que para diferentes resultado da medida da Alice, nós teremos diferentes estados de colapso para o q-bit do Bob. Portanto quando Alice realizar a medida sobre suas partículas, ela deverá informar o resultado para o Bob e este deverá "corrigir" o seu estado para obter exatamente o estado  $|\psi\rangle$  que Alice queria enviar. As Correções do Bob para os respectivos resultados da medida de Alice são mostradas na Tabela 2.

### 3.2.2 TQ de portas de 1 q-bit

Para que tenhamos um modelo que nos permita realizar computação quântica universal, é importante mostrar que o modelo permite implementar qualquer porta de um q-bit. Considerando uma porta qualquer de um q-bit nós precisamos mostrar que, dado um estado  $|\psi\rangle$ , Alice seja capaz de enviar esse estado para o Bob com uma porta  $U$  aplicada.

Essa tarefa pode ser realizada usando o mesmo procedimento introduzido na seção anterior para o TQ. Porém, a porta que ao final deve estar atuando no estado do q-bit físico do Bob não pode ser implementada por ele, uma vez que este não possui poder computacional. A solução é transferir tal porta para o início do circuito. Aqui nós também vamos considerar que Alice não tem poder computacional e que suas operações estão restritas às operações do TQ via circuitos. Nessa situação faz-se necessário que uma terceira parte, chamada Charlie, forneça os recursos necessários para Alice e Bob realizarem o procedimento e este recurso é um *estado de Bell rodado*. Esse recurso depende da porta  $U$  que será implementada por Alice no q-bit do Bob e é dado por  $\mathbb{1} \otimes U|\beta_{00}\rangle$ , de modo que o esquema que implementa a porta  $U$  de um q-bit é dado agora na Fig. 4.

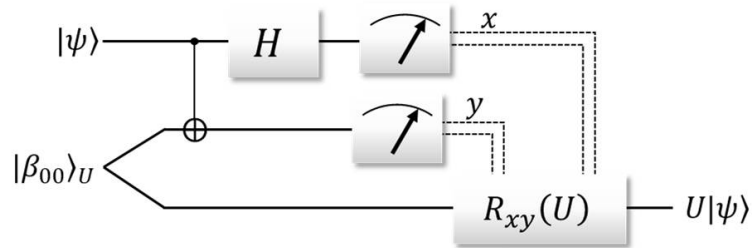


Figura 4: Circuito para implementar portas via TQ. O recurso deve ser fornecido por Charlie para Alice e Bob. Tal recurso é um estado de Bell "rodado"  $|\beta_{00}\rangle_U = \mathbb{1} \otimes U|\beta_{00}\rangle$ , onde  $U$  é a porta que deve ser implementada ao final do processo na partícula do Bob.

O circuito de correção do Bob, agora dado por  $R_{xy}(U)$ , depende da porta a ser implementada

Tabela 3: Correções do Bob para o TQ de portas

| Resultado da Alice | Estado do Bob               |
|--------------------|-----------------------------|
| $ 00\rangle$       | $aU 0\rangle + bU 1\rangle$ |
| $ 01\rangle$       | $aU 1\rangle + bU 0\rangle$ |
| $ 10\rangle$       | $aU 0\rangle - bU 1\rangle$ |
| $ 11\rangle$       | $aU 1\rangle - bU 0\rangle$ |

pelo circuito. Nós podemos construir um conjunto de estados que são os possíveis colapsos do q-bit do Bob após uma medida da Alice, onde o estado do sistema após aplicar o circuito e imediatamente antes da medida é dada por

$$\begin{aligned}
 |\phi_C\rangle_U = & \frac{1}{2} [|00\rangle_A (aU|0\rangle + bU|1\rangle)_B + |01\rangle_A (aU|1\rangle + bU|0\rangle)_B] \\
 & + \frac{1}{2} [|10\rangle_A (aU|0\rangle - bU|1\rangle)_B + |11\rangle_A (aU|1\rangle - bU|0\rangle)_B] \quad . \quad (33)
 \end{aligned}$$

Novamente nós podemos notar a necessidade do canal clássico entre Alice e Bob. Para cada medida de Alice teremos um estado de colapso correspondente nas partículas do Bob, mas dessa vez a novidade é que esse estado vem acompanhado de uma porta  $U$  aplicada. O estado do Bob para cada medida de Alice é como mostra a Tabela 3. Assim Bob poderá realizar as correções necessárias e obter o estado  $U|\psi\rangle$  em seu q-bit.

### 3.2.3 TQ de portas controladas

Para que possamos realizar CQ universal com o modelo proposto anteriormente, agora devemos ser capazes de mostrar que podemos implementar portas controladas de 2 q-bits com este modelo. Primeiro note que se fizermos  $N$  réplicas do circuito disposto na Fig. 3, então nós podemos implementar o TQ de  $N$  estados quânticos. Como a ideia é implementar portas controladas de 2 q-bits em quaisquer estados de 2 q-bits, nós temos que implementar o TQ de estados de 2 q-bits e, junto com essa tarefa, implementar portas de 2 q-bits nesses q-bits. Aqui nós mostramos o circuito que deve ser capaz de implementar a porta CNOT no estado de 2 q-bits a ser teleportado.

Considere os estados quaisquer  $|\psi_k\rangle = a_k|0\rangle + b_k|1\rangle$ , onde  $k = \{1, 2\}$ , e dois pares de Bell que serão usados como recurso. Então o circuito que deve implementar o TQ da porta CNOT é dado na Fig. 5. Note que a correção que deve ser feita por Bob (após a medida da Alice) presente no circuito da Fig. 5, é ligeiramente diferente das correções que deveriam ser feitas se quiséssemos apenas realizar o duplo TQ. Essa diferença é devido usarmos o protocolo para implementar a porta CNOT, assim como vimos que no TQ de portas de 1 q-bit (Fig. 4) deveríamos ter correções diferentes das correções no TQ de estados quânticos (Fig. 3).

Digamos que Alice não poder implementar CNOT em suas partículas, mesmo assim ela poderia realizar o teleporte de portas. Para isso basta que Charlie possar dar os recursos necessários para Alice e Bob, isto é, um canal quântico da forma  $|\chi\rangle = CNOT_{32}|\beta_{00}\rangle_{13}|\beta_{00}\rangle_{24}$ . Assim nós

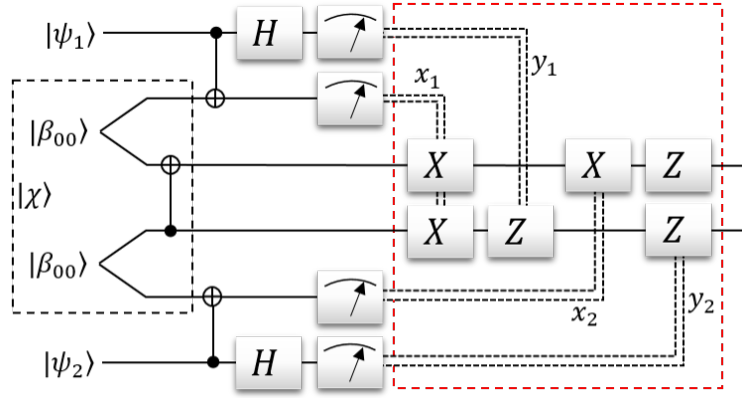


Figura 5: Circuito para implementar a porta CNOT via TQ. Em analogia com o TQ de portas de 1 q-bit, a porta CNOT que atuaria ao final do processo, deve atuar no início como mostra o circuito. As linhas tracejadas são informações clássicas (um bit) que implicam na atuação da correspondente porta se o bit for 1. As correções feitas pelo Bob dependem do conjunto de informações  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , e estão indicadas pelo retângulo vermelho tracejado.

conseguimos mostrar que se o estado inicial do sistema é  $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle|\chi\rangle$ , então ao final do processo (já com as devidas correções feitas pelo Bob) teremos que o estado das partículas do Bob é  $CNOT|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$ .

### 3.3 Computação Quântica Adiabática via TQ

A ideia da CQ Adiabática [11] é construir um Hamiltoniano que seja capaz de dirigir o sistema de um estado input que é autoestado fundamental de um Hamiltoniano  $H_{\text{inicial}}$ , até um estado output que é autoestado fundamental de outro Hamiltoniano  $H_{\text{final}}$ . Os Hamiltonianos devem ser construídos de modo que o estado output seja a resposta de um dado problema que desejamos solucionar.

Neste tópico nós mostraremos como combinar o TQ e o teorema adiabático para implementar as portas quânticas de um circuito quântico. Vale mencionar que a complexidade na implementação desse tipo de modelo computacional é equivalente à complexidade de implementar o circuito quântico, pois a proposta é mostrar como as portas quânticas de um circuito podem ser implementadas adiabaticamente via TQ. O grande mérito do trabalho do Bacon e Flammia [41] foi construir Hamiltonianos adiabáticos que nos permitam simular exatamente o que os circuitos apresentados nas Figs. 3, 4 e 5 reproduzem.

Todo o estudo desse modelo será feito de uma forma diferente de como foi originalmente proposto por Bacon e Flammia. A original demonstração da realização do TQ adiabático de portas foi feito usando a definição de q-bits lógicos e operadores lógicos. Além da nova forma de mostrar que o TQ adiabático de portas acontece, como uma contribuição original dessa dissertação nós estendemos o modelo do Bacon e Flammia. Mostramos que este modelo pode ser usado para realizar computação quântica por meio de outros conjuntos de portas quânticas universais.

### 3.3.1 TQ Adiabático

Nós sabemos que o TQ basicamente se resume em preparar o sistema Alice-Bob em um estado  $|\psi\rangle_1 |\beta_{kl}\rangle_{23}$ , onde  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  é o estado desconhecido a ser teleportado e  $|\beta_{kl}\rangle$  é um estado de Bell. Em seguida Alice deve fazer operações sobre suas partículas (partículas 1 e 2) e enviar o resultado de uma medida para o Bob, que por sua vez realizará operações no q-bit dele (partícula 3) que dependem do resultado da medida de Alice. Ao final do processo o estado final do sistema é  $|\beta_{mn}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$ . Um esquema é apresentado na Fig. 6.

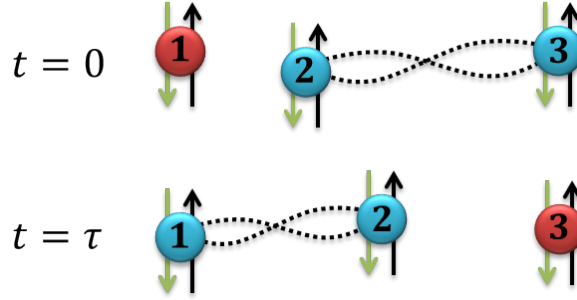


Figura 6: Esquema do estado final e inicial do protocolo de TQ adiabático do estado de um q-bit. Inicialmente a partícula 1 em posse da Alice devem conter o estado  $|\psi\rangle$  a ser teleportado, e ao final do processo a partícula 3 em posse do Bob estará no estado  $|\psi\rangle$ .

Para realizar CQ adiabática nós precisamos construir Hamiltonianos  $H_{\text{ini}}$  e  $H_{\text{fin}}$  de modo que  $|\psi\rangle_1 |\beta_{kl}\rangle_{23}$  e  $|\beta_{mn}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$  sejam autoestado de  $H_{\text{ini}}$  e  $H_{\text{fin}}$ , respectivamente, para todo  $|\psi\rangle$ . Para facilitar a construção de  $H_{\text{ini}}$  e  $H_{\text{fin}}$  nós devemos escolher o estado recurso  $|\beta_{kl}\rangle$  que iremos usar. Escolhendo o estado  $|\beta_{00}\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ , nós podemos mostrar que <sup>2</sup>

$$H_{\text{ini}} = -\omega\hbar \mathbb{1}_1 (Z_2 Z_3 + X_2 X_3) \quad , \quad (34)$$

$$H_{\text{fin}} = -\omega\hbar (Z_1 Z_2 + X_1 X_2) \mathbb{1}_3 \quad , \quad (35)$$

é uma boa escolha, pois mostra-se que  $|\psi\rangle_1 |\beta_{00}\rangle_{23}$  e  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$  são autoestados fundamentais de  $H_{\text{ini}}$  e  $H_{\text{fin}}$ , respectivamente. Agora, como nós deveremos dirigir o sistema do estado  $|\psi\rangle_1 |\beta_{00}\rangle_{23}$  para o  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$  adiabaticamente, deixe-nos definir o Hamiltoniano adiabático

$$H(s) = \eta_i(s) H_{\text{ini}} + \eta_f(s) H_{\text{fin}} \quad , \quad (36)$$

onde as funções  $\eta_i(s)$  e  $\eta_f(s)$  são funções contínuas do parâmetro  $s$ . A informação sobre a adiabaticidade de  $H(s)$  está contida no parâmetro  $s = t/T$ , onde  $T$  é o tempo total de evolução do sistema e deve ser tal que o sistema evolua lentamente. As funções  $\eta_i(s)$  e  $\eta_f(s)$  devem satisfazer  $\eta_i(1) = \eta_f(0) = 0$  e  $\eta_i(0) = \eta_f(1) = 1$ , para garantir que  $|\psi\rangle_1 |\beta_{00}\rangle_{23}$  e  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$  sejam autoestados fundamentais de  $H(s)$  em  $s = 0$  e  $s = 1$ , respectivamente.

<sup>2</sup>A escolha dos operadores  $Z_n Z_m$  e  $X_n X_m$  para definir os Hamiltonianos (34) e (35) pode ser justificada devido estes serem *estabilizadores* do estado de Bell  $|\beta_{00}\rangle_{nm}$ , aliás, esses são os únicos estabilizadores para tal estado [9].



Um ponto importante que deve ser mencionado é que diferentemente dos protocolos estudados anteriormente, não teremos a necessidade de realizar uma medida ao final do processo. Por outro lado, agora teremos restrições sobre a distância entre Alice e Bob, já que o Hamiltoniano que fará a evolução local.

Calculando o espectro de  $H(s)$ , afim de determinar o gap mínimo, nós vemos que  $H(s)$  tem um espectro degenerado e dado por

$$\varepsilon_0(s) = -2\omega\hbar\sqrt{\eta_i^2(s) + \eta_f^2(s)} \quad , \quad (37)$$

$$\varepsilon_1(s) = \varepsilon_2(s) = 0 \quad , \text{ e} \quad (38)$$

$$\varepsilon_3(s) = 2\omega\hbar\sqrt{\eta_i^2(s) + \eta_f^2(s)} \quad , \quad (39)$$

onde cada nível de energia  $\varepsilon_n(s)$  é duplamente degenerado. Assim nós podemos determinar o gap em função do tempo dado por

$$g(s) = \varepsilon_1(s) - \varepsilon_0(s) = 2\omega\hbar\sqrt{\eta_i^2(s) + \eta_f^2(s)} \quad . \quad (40)$$

Da Eq. (36) nós devemos assegurar que a igualdade  $\eta_i(s) = \eta_f(s) = 0$  *não pode* ocorrer para nenhum  $s \in [0, 1]$ . E isso garante que  $g(s) \neq 0 \forall s \in [0, 1]$ , pois  $g(s) = 0$  só ocorre se  $\eta_i(s) = \eta_f(s) = 0$  ocorrer em algum  $s \in [0, 1]$ . Considerado isso, consequentemente o gap mínimo definido como  $g_{\min} = \min_{s \in [0, 1]} g(s)$  é não nulo.

Um problema que surge é que devido a dupla degenerescência de  $H(s)$  com relação ao estado fundamental, o estado final pode não ser  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$ . Assim, o teorema adiabático sozinho não é o suficiente para assegurar que o estado final do sistema será exatamente  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$ . Para resolver esse problema e mostrar que o estado final do sistema é exatamente  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$ , nós vamos usar propriedades de simetria do Hamiltoniano.

**As Simetrias do Hamiltoniano  $H(s)$  e sua forma matricial** Deixe-nos considerar o Hamiltoniano da Eq. (36). Então definindo os operadores  $\Pi_z = ZZZ$  e  $\Pi_x = XXX$  nós podemos mostrar que

$$[H(s), \Pi_z] = [H(s), \Pi_x] = 0 \quad , \quad (41)$$

o que nos mostra que  $H(s)$  tem duas simetrias. Considerando um estado da base computacional  $|mnk\rangle$ , então temos as seguintes equações

$$\Pi_z |mnk\rangle = (-1)^{m+n+k} |mnk\rangle \quad , \quad (42)$$

$$\Pi_x |mnk\rangle = |\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle \quad , \quad (43)$$

onde  $\bar{x} = 1 - x$ . Devido as Eqs. (42) e (43), nós denominamos  $\Pi_z$  como *operador de paridade* dos estados da base computacional e  $\Pi_x$  como *operador troca de paridade*. Mostrar que  $\Pi_x$  troca a paridade é fácil. Considere um estado  $|mnk\rangle$  de paridade  $p_{mnk} = (-1)^{m+n+k}$ , então  $|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle$  terá

paridade  $p_{\bar{m}\bar{n}\bar{k}} = (-1)^{\bar{m}+\bar{n}+\bar{k}} = (-1)^3 (-1)^{-m-n-k} = -(-1)^{m+n+k} = -p_{mnk}$ , assim mostrando que  $|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle$  e  $|mnk\rangle$  possuem paridades opostas.

A simetria em  $\Pi_z$  nos diz que nós podemos escrever o Hamiltoniano  $H(s)$  na base computacional  $\{|mnk\rangle\}$  em uma forma bloco diagonal como segue

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{4 \times 4}^+(s) & \mathbb{0}_{4 \times 4} \\ \mathbb{0}_{4 \times 4} & H_{4 \times 4}^-(s) \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbb{0}_{4 \times 4}$  é uma matriz  $4 \times 4$  nula e os blocos  $H_{4 \times 4}^\pm(s)$  são formados por elementos de matrizes de  $H(s)$  escrito na base computacional. Aqui nós não especificamos exatamente o ordenamento da base, mas nós consideramos que os quatro primeiros elementos da base são elementos de paridade  $+1$  e os quatro ultimos são elementos da base com paridade  $-1$ . Para melhorar a notação, sempre escreveremos os elementos de base com paridade  $+1$  e  $-1$  como  $|mnk\rangle_+$  (com dual  ${}_+ \langle mnk|$ ) e  $|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_-$  (com dual  ${}_-\langle \bar{m}\bar{n}\bar{k}|$ ), respectivamente. Por outro lado, nós ainda temos a simetria em  $\Pi_x$ . O que ela nos diz?

Sabendo que o operador  $\Pi_x$  atua sobre um estado de paridade  $\pm 1$  e nos fornece como resultado um estado de paridade  $\mp 1$ , então poderíamos nos perguntar se existe, ou não, uma relação bem determinada entre os elementos de matrizes dos blocos  $H_{4 \times 4}^\pm(s)$  do Hamiltoniano  $H(s)$ . Para verificar se há ou não uma correspondência, considere o elemento de matriz do bloco formado pelos vetores de paridade  $-1$  dado por

$$h_{\bar{m}\bar{n}\bar{k}}^{\bar{m}'\bar{n}'\bar{k}'}(s) = \langle \bar{m}\bar{n}\bar{k} | H(s) | \bar{m}'\bar{n}'\bar{k}' \rangle_- , \quad (44)$$

e seja  $h_{mnk}^{m'n'k'}(s)$  elementos do bloco formado pelos vetores de paridade  $-1$ , assim

$$h_{mnk}^{m'n'k'}(s) = \langle mnk | H(s) | m'n'k' \rangle_+ , \quad (45)$$

agora vamos usar a Eq. (43) para escrever a Eq. (44) como

$$h_{\bar{m}\bar{n}\bar{k}}^{\bar{m}'\bar{n}'\bar{k}'}(s) = \langle mnk | \Pi_x H(s) \Pi_x | m'n'k' \rangle_+ .$$

Usando que  $[H(s), \Pi_x] = 0$  e que  $\Pi_x^{2n} = \mathbb{1}$ , temos portanto

$$h_{\bar{m}\bar{n}\bar{k}}^{\bar{m}'\bar{n}'\bar{k}'}(s) = \langle mnk | H(s) | m'n'k' \rangle_+ = h_{mnk}^{m'n'k'}(s) , \quad (46)$$

que nos mostra que para cada elemento de matriz do bloco de paridade  $-1$ , nós temos um elemento igual no bloco de paridade  $+1$  e, consequentemente, se nós ordenarmos adequadamente a base nós podemos ter

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{4 \times 4}(s) & \mathbb{0}_{4 \times 4} \\ \mathbb{0}_{4 \times 4} & H_{4 \times 4}(s) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

onde os elementos de matrizes de  $H_{4 \times 4}(s)$  são determinados a partir da Eq. (45). Calculando os

elementos de matrizes  $h_{mnk}^{m'n'k'}(s)$  nós encontramos

$$\begin{aligned} h_{mnk}^{m'n'k'}(s) &= \eta_i(s) \langle mnk | H_{in} | m'n'k' \rangle + \eta_f(s) \langle mnk | H_{fin} | m'n'k' \rangle \\ &= -\hbar\omega\eta_i(s) \delta_{mm'} [\langle nk | XX | n'k' \rangle + \langle nk | ZZ | n'k' \rangle] \\ &\quad -\hbar\omega\eta_f(s) \delta_{kk'} [\langle mn | XX | m'n' \rangle + \langle mn | ZZ | m'n' \rangle] , \end{aligned}$$

usando que  $\langle mn | ZZ | m'n' \rangle = (-1)^{m+n} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$  e que  $\langle mn | XX | m'n' \rangle = (1 - \delta_{mm'}) (1 - \delta_{nn'})$ , temos portanto que

$$\begin{aligned} h_{mnk}^{m'n'k'}(s) &= -\hbar\omega\eta_i(s) \delta_{mm'} [(-1)^{k+n} \delta_{nn'} \delta_{kk'} + (1 - \delta_{nn'}) (1 - \delta_{kk'})] \\ &\quad -\hbar\omega\eta_f(s) \delta_{kk'} [(-1)^{m+n} \delta_{mm'} \delta_{nn'} + (1 - \delta_{mm'}) (1 - \delta_{nn'})] \end{aligned} \quad (48)$$

são os elementos de matrizes dos blocos da forma matricial do Hamiltoniano  $H(s)$ . Para encontrar a forma matricial de cada bloco  $H_{4 \times 4}(s)$  nós consideramos aqui a sequencia da base  $|mnk\rangle_+$  como sendo  $\{|000\rangle, |011\rangle, |101\rangle, |110\rangle\}$ , consequentemente da base  $|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_-$  como  $\{|111\rangle, |100\rangle, |010\rangle, |001\rangle\}$ , e assim podemos mostrar que

$$H_{4 \times 4}(s) = -\hbar\omega \begin{bmatrix} \eta_i(s) + \eta_f(s) & \eta_i(s) & 0 & \eta_f(s) \\ \eta_i(s) & \eta_i(s) - \eta_f(s) & \eta_f(s) & 0 \\ 0 & \eta_f(s) & -\eta_f(s) - \eta_i(s) & \eta_i(s) \\ \eta_f(s) & 0 & \eta_i(s) & \eta_f(s) - \eta_i(s) \end{bmatrix} . \quad (49)$$

Com essa escolha nós podemos ver que para escrever a forma matricial do Hamiltoniano  $H(s)$  como na Eq. (47), onde cada bloco  $H_{4 \times 4}(s)$  é dado pela Eq. (49), a base deve estar necessariamente na seguinte sequência  $\{|mnk\rangle_+, |\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_-\}$ , onde  $\{|mnk\rangle_+\} = \{|000\rangle, |011\rangle, |101\rangle, |110\rangle\}$  e  $|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_- = \{|111\rangle, |100\rangle, |010\rangle, |001\rangle\}$ .

**A reprodução do estado final: Sucesso no TQ** Devido a degenerescência do nível de energia fundamental do Hamiltoniano  $H(s)$ , nós não podemos assegurar, apenas com o teorema adiabático, que o TQ será realizado com sucesso. Essa degenerescência permite que os coeficientes  $a$  e  $b$  (que carregam a informação sobre o estado  $|\psi\rangle$ ) possam se "misturar" de forma que o que teremos no final do processo não seja o estado  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  no terceiro q-bit, e sim um estado do tipo  $|\bar{\psi}\rangle = \alpha(a, b)|0\rangle + \beta(a, b)|1\rangle$ , onde  $|\alpha(a, b)|^2 + |\beta(a, b)|^2 = 1$ . De fato, considerando que o teorema adiabático garante que o estado final será o autoestado fundamental de  $H_{fin}$ , podemos ver que ambos os estados  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$  e  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\bar{\psi}\rangle_3$  são autoestados fundamentais de  $H_{fin}$ .

Para resolver esse problema nós faremos uso dos resultados apresentados anteriormente.

Deixe-nos escrever o estado inicial  $|\phi(0)\rangle$  e final  $|\phi(1)\rangle$  como

$$|\phi(0)\rangle = |\psi\rangle_1 |\beta_{00}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} [a(|000\rangle + |011\rangle) + b(|100\rangle + |111\rangle)]_{123} \quad , \quad (50)$$

$$|\phi(1)\rangle = |\beta_{00}\rangle_{12} |\bar{\psi}\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(a, b)(|000\rangle + |110\rangle) + \beta(a, b)(|001\rangle + |111\rangle)]_{123} \quad . \quad (51)$$

A simetria do Hamiltoniano  $H(s)$  com relação a paridade em  $\Pi_z$  nos diz que se iniciarmos o nosso sistema em um estado qualquer de paridade  $\pm 1$ , o estado do sistema evolui para estados instantâneos de paridade  $\pm 1$ . Portanto, se iniciamos o sistema em uma superposição de estados de paridades distintas, então podemos afirmar apenas que cada conjunto, formado por estados de paridades bem definidas e iguais, evoluirá independente um do outro. Para fazer uso de tal resultado, note que os coeficientes  $a$  e  $b$  na Eq. (50) multiplicam estados de paridade  $+1$  e  $-1$ , respectivamente, e na Eq. (51) os coeficientes  $\alpha(a, b)$  e  $\beta(a, b)$  multiplicam também estados de paridade  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. Então devido a simetria em  $\Pi_z$  nós não devemos encontrar uma dependência de  $b$  no coeficiente  $\alpha(a, b)$ , da mesma forma  $\beta(a, b)$  não pode ter dependência em  $a$ . Em conclusão, nós teremos que  $\alpha(a, b) = \alpha(a)$  e  $\beta(a, b) = \beta(b)$ .

Agora, nós devemos usar a unitariedade da evolução. Sabendo que evoluções unitárias mantêm invariante a norma de um estado [50], então devemos esperar que  $|\alpha(a)|^2 + |\beta(b)|^2 = |a|^2 + |b|^2$ . Devido a independência dos coeficientes  $a$  e  $b$ , bem como de  $\alpha(a)$  e  $\beta(b)$ , a solução da igualdade é dada por  $|\alpha(a)|^2 = |a|^2$  e  $|\beta(b)|^2 = |b|^2$ , que por sua vez nos permite ainda escrever  $\alpha(a) = ae^{i\theta_a}$  e  $\beta(b) = be^{i\theta_b}$ , para  $\theta_a$  e  $\theta_b$  reais. As fases  $\theta_a$  e  $\theta_b$  surgem devido a evolução unitária de cada estado independentemente, logo não podemos garantir, ainda, que existe alguma relação entre  $\theta_a$  e  $\theta_b$ .

Ainda temos uma simetria a ser usada, a simetria em  $\Pi_x$ . Vimos que a simetria em  $\Pi_x$  nos permite mostrar que os blocos do Hamiltoniano  $H(s)$  são idênticos. Cada bloco do Hamiltoniano  $H(s)$  é responsável por evoluir um determinado conjunto de estados, por exemplo, o Hamiltoniano  $H_{4 \times 4}(s)$  do primeiro bloco e do segundo bloco dirigem todos os estados do conjunto  $\{|mnk\rangle_+\}$  e  $\{|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_-\}$ , respectivamente. Então podemos afirmar que, como os blocos são idênticos, cada conjunto  $\{|mnk\rangle_+\}$  e  $\{|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_-\}$  evolui de forma idêntica. Isso significa que qualquer fase que venha a surgir multiplicando estados de paridade  $+1$ , também devem surgir (exatamente a mesma fase) multiplicando estados de paridade  $-1$ . Em outras palavras, devido a paridade do Hamiltoniano  $H(s)$  em relação a  $\Pi_x$ , estados de paridades distintas evoluem da mesma forma, consequentemente podemos escrever para os coeficientes  $\alpha(a)$  e  $\beta(b)$  que  $\alpha(a) = ae^{i\theta}$  e  $\beta(b) = be^{i\theta}$ , para algum real  $\theta$ .

Com isso nós conseguimos escrever que o estado final  $|\phi(1)\rangle$  é dado por

$$|\phi(1)\rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} [a(|000\rangle + |110\rangle) + b(|001\rangle + |111\rangle)]_{123} = e^{i\theta} |\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3 \quad , \quad (52)$$

portanto o estado final do sistema é exatamente o estado que caracteriza o TQ a menos de uma

fase global  $\theta$ .

### 3.3.2 TQ Adiabático de 2 q-bits

A fim de realizar o duplo teleporte, um estado de 2 q-bits deve ser preparado e dado para Alice. Nós deixamos livre para que esse estado seja o mais geral possível, ou seja, consideramos que

$$|\psi_2\rangle = a_1 |00\rangle + a_2 |01\rangle + a_3 |10\rangle + a_4 |11\rangle \quad , \quad (53)$$

onde a condição de normalização de  $|\psi_2\rangle$  impõe que  $\sum_{n=1}^4 |a_n|^2 = 1$ . A depender do conjunto de coeficientes  $\{a_n\}$ , nós poderemos ter um estado  $|\psi_2\rangle$  emaranhado. O canal quântico que deve ser estabelecido entre Alice e Bob é dado por dois pares de partículas emaranhadas que aqui nós consideramos como sendo o estado  $|\beta_{00}\rangle$ . Nós rotulamos as partículas com os números de 1 a 6 e dividimos o sistema em dois setores, ímpar e par. Nós preparamos o estado a ser teleportado nas partículas 1 e 2 e deixamos as partículas 1 e 2 em posse da Alice. O canal quântico é formado pelas partículas enumeradas de 3 a 6 onde os pares de partículas emaranhadas são formados pelas partículas 3 e 5 e por 4 e 6, compondo o canal do setor ímpar e par, respectivamente. Um esquema pode ser visto na Fig. 7.

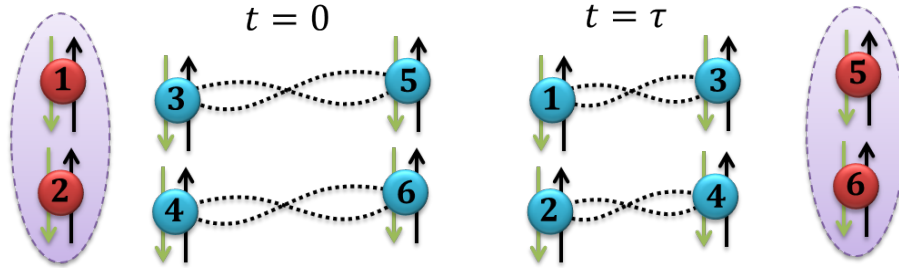


Figura 7: Esquema do estado final e inicial do protocolo de TQ adiabático. Inicialmente as partículas 1 e 2 em posse da Alice devem conter o estado  $|\psi_2\rangle$  a ser teleportado, e ao final do processo as partículas 5 e 6 em posse do Bob estarão no estado  $|\psi_2\rangle$ .

Pra realizar o duplo TQ adiabaticamente, nós devemos considerar o seguinte Hamiltoniano adiabático

$$H_D(s) = H_P(s) \otimes \mathbb{1}_I + \mathbb{1}_P \otimes H_I(s) \quad , \quad (54)$$

onde denotaremos apenas por  $H_D(s) = H_P(s) \mathbb{1}_I + \mathbb{1}_P H_I(s)$ . Nós podemos notar que o Hamiltoniano  $H_D(s)$  não permite nenhuma interação entre os setores par e ímpar. A escolha do Hamiltoniano acima foi feita de modo que possamos reproduzir exatamente a tarefa realizada pelo duplo protocolo de TQ via circuitos quânticos, onde nós aplicamos dois circuitos *independentes* para teleportar o estado de 2 q-bits. Cada Hamiltoniano  $H_S(s)$ , onde  $S$  indica o setor  $I$  (ímpar) ou  $P$  (par), é da forma dada na Eq. (36) e atua apenas no setor  $S$ . De forma mais clara,

o Hamiltoniano  $H_I(s)$  ( $H_P(s)$ ) atua sobre os q-bits 1, 3 e 5 (2, 4 e 6) e é da forma

$$H_{I(P)}(s) = \eta_i(s) H_{\text{ini}}^{I(P)} + \eta_f(s) H_{\text{fin}}^{I(P)} , \quad (55)$$

onde

$$H_{\text{ini}}^{I(P)} = -\omega\hbar \mathbb{1}_{1(2)} (Z_{3(4)} Z_{5(6)} + X_{3(4)} X_{5(6)}) , \quad (56)$$

$$H_{\text{fin}}^{I(P)} = -\omega\hbar (Z_{1(2)} Z_{3(4)} + X_{1(2)} X_{3(4)}) \mathbb{1}_{5(6)} . \quad (57)$$

Assim, cada Hamiltoniano  $H_S(s)$  será responsável por evoluir adiabaticamente o setor  $S$ . Devido as formas de  $H_{\text{ini}}^{I(P)}$  e de  $H_D(s)$ , podemos mostrar facilmente que o estado inicial dado por

$$|\phi_2(0)\rangle = |\psi_2\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} \quad (58)$$

é o autoestado de  $H_D(0)$  e que

$$|\phi_2(1)\rangle = |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\psi_2\rangle_{56} \quad (59)$$

é o autoestado de  $H_D(1)$ . Para mostrar isso, usamos o seguinte resultado [64]: Sejam dois operadores  $A_{m \times m}$  e  $B_{n \times n}$  e suas respectivas equações de autovalores  $A|a_\mu\rangle = a_\mu|a_\mu\rangle$  e  $B|b_\nu\rangle = b_\nu|b_\nu\rangle$ . Então se um operador  $C$  puder ser escrito como  $C_{k \times k} = A_{m \times m} \otimes \mathbb{1}_{n \times n} + \mathbb{1}_{m \times m} \otimes B_{n \times n}$ , onde  $k = mn$ , a equação de autovalor para  $C_{k \times k}$  é  $C|c_\kappa\rangle = c_\kappa|c_\kappa\rangle$ , onde os vetores  $|c_\kappa\rangle = |a_\mu\rangle|b_\nu\rangle$  formam o conjunto de autoestados de  $C$  com correspondentes autovalores  $c_\kappa = a_\mu + b_\nu$ . Sabendo que  $|\zeta_2\rangle_2 |\beta_{00}\rangle_{46}$  e  $|\zeta_1\rangle_1 |\beta_{00}\rangle_{35}$  são autoestados fundamentais de  $H_P(0)$  e  $H_I(0)$ , do resultado acima nós garantimos que  $|\phi(0)\rangle$  é autoestado fundamental de  $H_D(0)$ . A mesma análise pode ser feita para mostrar que  $|\phi(1)\rangle$  é autoestado fundamental de  $H_D(1)$ . Ainda com a ajuda de tal resultado, nós podemos determinar o gap de energia entre o estado fundamental de  $H_D(s)$  e o primeiro excitado. Como os Hamiltonianos  $H_I(s)$  e  $H_P(s)$  são dados pela Eq. (36), o espectro de  $H_D(s)$  é dado por

$$\varepsilon_{mn}(s) = \varepsilon_n(s) + \varepsilon_m(s) , \quad (60)$$

onde as quantidades  $\varepsilon_m(s)$  são dadas pelas Eqs. (37), (38) e (39). Portanto a energia do nível fundamental é  $\varepsilon_{00}(s) = 2\varepsilon_0(s)$  e do primeiro excitado é  $\varepsilon_{01}(s) = \varepsilon_0(s)$ , logo encontramos o gap de energia como sendo

$$g_D(s) = \varepsilon_{01}(s) - \varepsilon_{00}(s) = 2\omega\hbar \sqrt{\eta_i^2(s) + \eta_f^2(s)} . \quad (61)$$

Como temos  $g_D(s) = g(s)$  (onde  $g(s)$  é o gap do TQ de 1 q-bit), isso mostra que no duplo TQ temos um gap de energia não nulo. A degenerescência de cada Hamiltoniano  $H_P(s)$  e  $H_I(s)$  é contabilizada para  $H_D(s)$  de modo que  $H_D(s)$  é quadruplamente degenerado, consequentemente o estado fundamental de  $H_D(s)$  também o é, assim nós teremos novamente o

problema encontrado no TQ de 1 q-bit para provar que o TQ acontece. Mas assim como para 1 q-bit, nós também poderemos tentar resolver o problema via simetrias do Hamiltoniano.

**As simetrias do Hamiltoniano e sua forma matricial** Mais uma vez a não suficiência do teorema adiabático em garantir que o TQ acontece, nos obriga a analisar as simetrias do Hamiltoniano que dirige o sistema e ver quais informações podem ser extraídas delas. Devido a forma do Hamiltoniano  $H_D(s)$  nós podemos obter as suas simetrias facilmente a partir das simetrias dos Hamiltonianos  $H_I(s)$  e  $H_P(s)$ . Definindo os operadores

$$\Pi_z^P = Z_2 Z_4 Z_6, \quad \Pi_x^P = X_2 X_4 X_6, \quad (62)$$

$$\Pi_z^I = Z_1 Z_3 Z_5, \quad \Pi_x^I = X_1 X_3 X_5, \quad (63)$$

nós podemos mostrar que

$$[H_D(s), \Pi_z^P \mathbb{1}^I] = [H_D(s), \Pi_x^P \mathbb{1}^I] = [H_D(s), \mathbb{1}^P \Pi_z^I] = [H_D(s), \mathbb{1}^P \Pi_x^I] = 0. \quad (64)$$

Em analogia ao caso do TQ simples nós denominamos os operadores  $\Pi_z^S$  e  $\Pi_x^S$  como operadores de paridade e inversão de paridade, respectivamente, do setor  $S$ . Consequentemente definimos os conjuntos de vetores  $\{|mnk\rangle_{+S}\}, \{|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_{-S}\}$ , com  $S = \{I, P\}$ , onde  $|mnk\rangle_P = |mnk\rangle_{246}$  e  $|mnk\rangle_I = |mnk\rangle_{135}$  e onde  $\{|mnk\rangle_{+S}\}$  e  $\{|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_{-S}\}$  são os conjuntos de vetores da base computacional de paridade  $+1$  e  $-1$ , respectivamente, do setor  $S$ . Não é difícil notar que vale a relação  $\Pi_x^S |mnk\rangle_{+S} = |\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_{-S}$  entre os conjuntos  $\{|mnk\rangle_{+S}\}$  e  $\{|\bar{m}\bar{n}\bar{k}\rangle_{-S}\}$ .

Além dessas simetrias de cada setor, nós ainda podemos encontrar simetrias do sistema como um todo fazendo combinações das simetrias de cada setor. Deixe-nos definir os operadores de *paridade total* e *inversão de paridade total* como

$$\Pi_z^D = \Pi_z^P \Pi_z^I = Z_2 Z_4 Z_6 Z_1 Z_3 Z_5, \quad (65)$$

$$\Pi_x^D = \Pi_x^P \Pi_x^I = X_2 X_4 X_6 X_1 X_3 X_5, \quad (66)$$

de modo que se definirmos o conjunto  $\{|n_2 n_4 n_6\rangle |n_1 n_3 n_5\rangle\}$  como a base computacional para o sistema total, a equação de autovalor para o operador  $\Pi_z^D$  sugere que a paridade do estado  $|n_2 n_4 n_6\rangle |n_1 n_3 n_5\rangle$  é determinado pela paridade de cada setor individualmente. De fato temos

$$\Pi_z^D |n_1 n_3 n_5\rangle |n_2 n_4 n_6\rangle = (-1)^{n_1+n_3+n_5} (-1)^{n_2+n_4+n_6} |n_1 n_3 n_5\rangle |n_2 n_4 n_6\rangle, \quad (67)$$

Deixe-nos agora definir os seguintes conjuntos  $\{|n_2 n_4 n_6\rangle_+ |n_1 n_3 n_5\rangle_+, |\bar{n}_2 \bar{n}_4 \bar{n}_6\rangle_- |\bar{n}_1 \bar{n}_3 \bar{n}_5\rangle_-\}$  e  $\{|\bar{n}_2 \bar{n}_4 \bar{n}_6\rangle_- |n_1 n_3 n_5\rangle_+, |n_2 n_4 n_6\rangle_+ |\bar{n}_1 \bar{n}_3 \bar{n}_5\rangle_-\}$  de paridade  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. Da forma como os operadores  $\Pi_z^D$  e  $\Pi_x^D$  foram definidos nas Eqs. (66) e (65) podemos chegar às relações de comutação

$$[H_D(s), \Pi_z^D] = [H_D(s), \Pi_x^D] = 0, \quad (68)$$

Assim nós faremos uso dessas simetrias para tentar determinar a forma matricial de  $H_D(s)$ . Primeiramente devemos atentar para a simetria total em  $\Pi_z^D$  que nos mostra que podemos ordenar adequadamente a base de modo que  $H_D(s)$  seja composto por dois blocos (bloco-diagonal) na base computacional. Então nós escolhemos, primeiramente, ordenar a base de modo que os 32 primeiros vetores da base sejam vetores de paridade +1 e os ultimos 32 sejam vetores de paridade -1. O uso dessa primeira simetria nos permite escrever

$$H_D(s) = \begin{bmatrix} H_{32 \times 32}^+(s) & \emptyset_{32 \times 32} \\ \emptyset_{32 \times 32} & H_{32 \times 32}^-(s) \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, a simetria em  $\Pi_x$  novamente nos permite ainda escrever que, novamente ordenando convenientemente a base, a forma matricial de  $H_{32 \times 32}^+(s)$  é exatamente a mesma de  $H_{32 \times 32}^-(s)$ . Como resultado do uso das simetrias em  $\Pi_z^D$  e  $\Pi_x^D$ , temos

$$H_D(s) = \begin{bmatrix} H_{32 \times 32}(s) & \emptyset_{32 \times 32} \\ \emptyset_{32 \times 32} & H_{32 \times 32}(s) \end{bmatrix}.$$

Agora nós vamos usar as simetrias de cada setor em separado para obter mais informações sobre a forma matricial de cada bloco  $H_{32 \times 32}(s)$ . Sabendo que cada bloco tem uma simetria em  $\Pi_z^P$  e  $\Pi_z^I$ , podemos (assim como no caso do TQ simples) afirmar que estados de paridades distintas evoluem independentemente em cada setor. Ou seja, o estado  $|n_2 n_4 n_6\rangle_+ |n_1 n_3 n_5\rangle_+$  tem paridade +1 se olharmos apenas para o setor par, por outro lado o estado  $|\bar{n}_2 \bar{n}_4 \bar{n}_6\rangle_- |\bar{n}_1 \bar{n}_3 \bar{n}_5\rangle_-$  tem paridade -1. Analogamente se olharmos para o setor de ímpar nós obtemos o mesmo resultado. Então a paridade em  $\Pi_z^P \mathbb{1}^I$ , bem como em  $\mathbb{1}^P \Pi_z^I$ , nos mostra que dentro do subconjunto  $\{|n_2 n_4 n_6\rangle_+ |n_1 n_3 n_5\rangle_+, |\bar{n}_2 \bar{n}_4 \bar{n}_6\rangle_- |\bar{n}_1 \bar{n}_3 \bar{n}_5\rangle_-\}$  nós podemos ordenar a base de modo que  $H_{32 \times 32}(s)$  seja bloco diagonal. De fato, ordenando os 16 primeiros vetores da base como sendo o conjunto  $\{|n_2 n_4 n_6\rangle_+ |n_1 n_3 n_5\rangle_+\}$  e os 16 ultimos como  $\{|\bar{n}_2 \bar{n}_4 \bar{n}_6\rangle_- |\bar{n}_1 \bar{n}_3 \bar{n}_5\rangle_-\}$ , podemos escrever

$$H_{32 \times 32}(s) = \begin{bmatrix} H_{16 \times 16}(s) & \emptyset_{16 \times 16} \\ \emptyset_{16 \times 16} & H_{16 \times 16}(s) \end{bmatrix},$$

onde já aproveitamos a simetria em  $\Pi_x^P$  para escrever que os blocos são idênticos. Assim, nós escrevemos o Hamiltoniano  $H_D(s)$  em sua forma matricial como

$$H_D(s) = \begin{bmatrix} H^{++}(s) & \emptyset_{16 \times 16} & \emptyset_{16 \times 16} & \emptyset_{16 \times 16} \\ \emptyset_{16 \times 16} & H^{--}(s) & \emptyset_{16 \times 16} & \emptyset_{16 \times 16} \\ \emptyset_{16 \times 16} & \emptyset_{16 \times 16} & H^{+-}(s) & \emptyset_{16 \times 16} \\ \emptyset_{16 \times 16} & \emptyset_{16 \times 16} & \emptyset_{16 \times 16} & H^{-+}(s) \end{bmatrix}, \quad (69)$$

logo, como resultado do ordenamento feito nós ficamos com a base ordenada da seguinte maneira  $\{|+\rangle_P |+\rangle_I\}, \{|-\rangle_P |-\rangle_I\}, \{|+\rangle_P |-\rangle_I\}, \{|-\rangle_P |+\rangle_I\}$ , onde denotamos  $|x\rangle_P |y\rangle_I$  como sendo um



estado que tem paridade  $x$  e  $y$  nos setores par e ímpar, respectivamente.

**Reprodução do estado final** Tendo em vista que a degenerescência de  $H_D(s)$  pode "misturar" os coeficientes  $\{a_n\}$  do estado  $|\psi_2\rangle$  durante o TQ, nós poderemos ter um estado inicial dado por  $|\phi_2(0)\rangle$ , mas o estado final pode não ser  $|\phi_2(1)\rangle$  onde o estado dos q-bits 5 e 6 é exatamente  $|\psi_2\rangle$ , mas poderemos ter um estado  $|\bar{\phi}_2(1)\rangle$  dado por

$$|\bar{\phi}_2(1)\rangle = |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\bar{\psi}_2\rangle_{56} , \quad (70)$$

onde

$$|\bar{\psi}_2\rangle = \alpha_1(\{a_n\})|00\rangle + \alpha_2(\{a_n\})|01\rangle + \alpha_3(\{a_n\})|10\rangle + \alpha_4(\{a_n\})|11\rangle , \quad (71)$$

em que cada novo coeficiente  $\alpha_n$  é função do conjunto de coeficientes antigos  $\{a_n\}$ . Agora deixe-nos escrever explicitamente os estados  $|\phi_2(0)\rangle$  e  $|\bar{\phi}_2(1)\rangle$  obtendo

$$\begin{aligned} |\phi_2(0)\rangle &= a_1|00\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} + a_2|01\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} \\ &\quad + a_3|10\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} + a_4|11\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} , \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} |\bar{\phi}_2(1)\rangle &= \alpha_1|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |00\rangle_{56} + \alpha_2|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |01\rangle_{56} \\ &\quad + \alpha_3|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |10\rangle_{56} + \alpha_4|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |11\rangle_{56} , \end{aligned} \quad (73)$$

onde denotamos  $\alpha_k = \alpha_k(\{a_n\})$  e onde temos que

$$|\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} = \frac{1}{2}(|00\rangle|00\rangle + |00\rangle|11\rangle + |11\rangle|00\rangle + |11\rangle|11\rangle)_{4635} , \quad (74)$$

$$|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} = \frac{1}{2}(|00\rangle|00\rangle + |00\rangle|11\rangle + |11\rangle|00\rangle + |11\rangle|11\rangle)_{2413} . \quad (75)$$

O estado  $|\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35}$ , bem como  $|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13}$ , combinados com os estados  $|nm\rangle_{12}$  e  $|nm\rangle_{56}$ , respectivamente, formam estados de paridades distintas (com relação a cada setor) de modo que podemos escrever

$$|\phi_2(0)\rangle = a_1|++\rangle_{PI} + a_2|-\rangle_{PI} + a_3|+-\rangle_{PI} + a_4|--\rangle_{PI} , \quad (76)$$

$$|\bar{\phi}_2(1)\rangle = \alpha_1|++\rangle_{PI} + \alpha_2|-\rangle_{PI} + \alpha_3|+-\rangle_{PI} + \alpha_4|--\rangle_{PI} , \quad (77)$$

onde nós definimos  $|xy\rangle_{PI} = |x\rangle_P |y\rangle_I$ , onde  $|x\rangle_P$  é uma superposição de estados do setor par de paridade  $x$  e  $|y\rangle_I$  uma superposição de estados do setor ímpar de paridade  $y$ . Nós desejamos escrever os estados dessa maneira para que possamos usar o fato de que estados que são combinações de estados da base computacional de paridades distintas evoluem independentemente. Por exemplo,  $|++\rangle_{PI}$  e  $|+-\rangle_{PI}$  são formados por combinações de estados de mesma paridade do setor par, mas não são com relação aos estados do setor ímpar, logo  $|++\rangle_{PI}$  e  $|+-\rangle_{PI}$  evoluem independentemente. O mesmo vale para os demais estados e portanto nós podemos escrever que cada  $\alpha_k$  não depende de todos os  $a_n$ , mas que  $\alpha_n = \alpha_n(a_n)$ . Outra forma de enxergar isso é

notando que cada bloco do Hamiltoniano na Eq. (69) evolui um estado  $|xy\rangle_{PI}$  diferente, portanto qualquer informação dos estados  $|+-\rangle_{PI}$  e  $|++\rangle_{PI}$  não se misturam, bem como nos demais e portanto  $\alpha_n = \alpha_n(a_n)$ . Porém, deve-se sempre ter em mente que o resultado  $\alpha_n = \alpha_n(a_n)$  é uma consequência das simetrias em  $\Pi_z^P \mathbb{1}^I$ ,  $\mathbb{1}^P \Pi_z^I$  e  $\Pi_z^D$ . Agora o próximo passo é usar a unitariedade da evolução que nos permite escrever equação

$$\sum_{n=1}^4 |\alpha_n(a_n)|^2 = \sum_{n=1}^4 |a_n|^2, \quad (78)$$

que tem como solução as relações entre  $\alpha_n(a_n)$  e  $a_n$  dadas por  $\alpha_n(a_n) = a_n e^{i\theta_n}$ , para algum  $\theta_n$  real. Cada parâmetro  $\theta_n$  está intimamente ligado com a evolução independente de um estado  $|xy\rangle_{PI}$ , para determinar alguma relação entre os  $\theta_n$ 's nós podemos usar as simetrias que são as simetrias em  $\Pi_x^P \mathbb{1}^I$ ,  $\mathbb{1}^P \Pi_x^I$  e  $\Pi_x^D$ . Com essas simetrias mostramos que os blocos  $H^{xy}(s)$  que constituem o Hamiltoniano  $H_D(s)$  são idênticos, então independente de como os estados  $|xy\rangle_{PI}$  evoluem, eles evoluem da mesma forma e consequentemente as fases  $\theta_n$ 's são todas iguais. Substituindo, portanto, essas informações na Eq. (77) nós obtemos exatamente o  $|\phi_2(1)\rangle = |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\psi_2\rangle_{56}$  a menos de uma fase global  $\theta$ .

### 3.3.3 TQ Adiabático de $n$ q-bits

Vimos que o uso das simetrias do Hamiltoniano em conjunto com a unitariedade da evolução do sistema nos permite mostrar que tanto o TQ de 1 q-bit como o de 2 q-bits pode ser feito adiabaticamente. Agora nós mostraremos como generalizar o modelo de TQ adiabático para teleportar um estado qualquer de  $n$  q-bits.

Inicialmente considere um sistema composto por  $n$  q-bits e que o sistema encontra-se no estado

$$|\psi_n\rangle = \sum_{k_1=\{0,1\}} \cdots \sum_{k_n=\{0,1\}} a_{k_1 \cdots k_n} |k_1 \cdots k_n\rangle_{1 \cdots n}. \quad (79)$$

Nós desejamos teleportar esse estado de  $n$  q-bits adiabaticamente. De forma análoga ao que foi feito no duplo TQ nós definimos  $n$  setores onde para cada setor nós necessitamos de um par de partículas emaranhadas. Nesse caso o canal quântico composto de  $n$  pares de partículas emaranhadas é dado por

$$|\Phi_n\rangle_{AB} = |\beta_{00}\rangle_{c_A^1 c_B^1} \cdots |\beta_{00}\rangle_{c_A^n c_B^n}, \quad (80)$$

onde os índices  $c_A^m$  e  $c_B^m$  rotulam as partículas do  $m$ -ésimo par emaranhado que está em posse da Alice e Bob, respectivamente. O esquema do sistema é representado na Fig. 8.

O estado inicial do sistema é portanto  $|\phi_n(0)\rangle = |\psi_n\rangle_A |\Phi_n\rangle_{AB}$ , e desejamos que o estado final do sistema seja  $|\phi_n(1)\rangle = |\Phi_n\rangle_A |\psi_n\rangle_B$ , onde

$$|\Phi_n\rangle_A = |\beta_{00}\rangle_{1c_A^1} \cdots |\beta_{00}\rangle_{nc_A^n}, \quad (81)$$

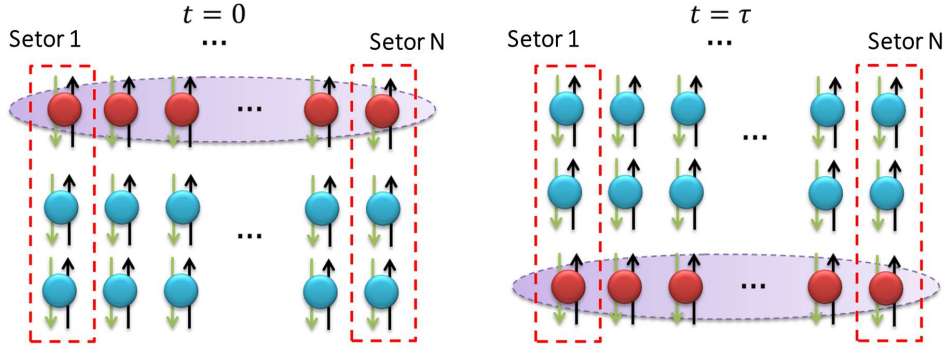


Figura 8: Esquema ilustrando o estado final e inicial do TQ adiabático de  $n$  q-bits. Cada setor é composto por 3 q-bits. Inicialmente ( $t = 0$ ) o estado a ser teleportado deve ser preparado nos  $n$  da primeira fila (sistema em vermelho) e o canal quântico recurso é dado por  $n$  pares de Bell (sistema em azul). Ao final do processo ( $t = \tau$ ) o estado  $|\psi_n\rangle$  foi teleportado para as partículas do Bob.

e que representa o estado do canal "impresso" nas partículas da Alice ao final da evolução e

$$|\psi_n\rangle_B = \sum_{k_1=\{0,1\}} \cdots \sum_{k_n=\{0,1\}} a_{k_1 \dots k_n} |k_1 \cdots k_n\rangle_{c_B^1 \dots c_B^n}, \quad (82)$$

que é o estado que dever ser teletransportado reproduzido nos  $n$  q-bits do Bob. Para realizar essa tarefa nós propomos o Hamiltoniano que dirigirá o sistema como sendo

$$H_{\text{mult}}(s) = \sum_{k=1} \mathcal{H}_k(s), \quad (83)$$

onde nós denotamos  $\mathcal{H}_j(s) = \left(\otimes_{i=1}^{j-1} \mathbb{1}_i\right) \otimes H_j(s) \otimes \left(\otimes_{i=j+1}^n \mathbb{1}_i\right)$ , com  $H_j(s)$  dado da forma

$$H_j(s) = \eta_i(s) H_{\text{ini}}^j + \eta_f(s) H_{\text{fin}}^j, \quad (84)$$

onde

$$H_{\text{ini}}^j = -\omega \hbar \mathbb{1}_j \left( Z_{c_A^j} Z_{c_B^j} + X_{c_A^j} X_{c_B^j} \right) \quad (85)$$

$$H_{\text{fin}}^j = -\omega \hbar \left( Z_j Z_{c_A^j} + X_j X_{c_A^j} \right) \mathbb{1}_{c_B^j} \quad (86)$$

Isso indica que  $H_j(s)$  é um Hamiltoniano que atua sobre o  $j$ -ésimo setor do sistema que esta esquematizado na Fig. 8. Assim como no duplo TQ, cada setor deve evoluir independentemente dos demais e portanto o TQ deve acontecer, desde que o gap mínimo entre o estado fundamental de  $H_{\text{mult}}(s)$  e o primeiro excitado seja não nulo. Uma primeira observação a ser feita é que a forma como  $H_{\text{mult}}(s)$  foi definido leva em conta que os estados  $|\phi_n(0)\rangle$  e  $|\phi_n(1)\rangle$  são estados fundamentais de  $H_{\text{mult}}(0)$  e  $H_{\text{mult}}(1)$ , respectivamente. Para determinar o gap mínimo, nós usaremos um resultado um pouco mais geral do que o resultado que foi usado na seção anterior [64]. Sejam  $n$  operadores  $A_{m_k \times m_k}$ , onde  $k = 1, \dots, n$  e onde deixa-se livre que as dimensões

de cada  $A_{m_k \times m_k}$  não sejam necessariamente iguais, e suas respectivas equações de autovalores  $A_{m_k \times m_k} |a_{\mu_k}^k\rangle = a_{\mu_k}^k |a_{\mu_k}^k\rangle$ . Então se um operador  $C$  puder ser escrito como  $C_{D \times D} = \sum_k A_{m_k \times m_k}$ , onde  $D = \prod_{k=1}^n m_k$ , então a equação de autovalor para  $C_{D \times D}$  escreve  $C |c_\kappa\rangle = c_\kappa |c_\kappa\rangle$ , com os vetores  $|c_\kappa\rangle = |a_{\mu_1}^1\rangle |a_{\mu_2}^2\rangle \cdots |a_{\mu_n}^n\rangle$  formando o conjunto de autoestados de  $C$  com correspondentes autovalores  $c_\kappa = \sum_k a_{\mu_k}^k$ .

Nós podemos, portanto, usar o teorema acima para calcular o espectro de  $H_{\text{mult}}(s)$  que, a depender do valor de  $n$ , pode ser um trabalho árduo. Mas como desejamos apenas o gap entre o nível de energia fundamental e o primeiro excitado, facilmente calculamos e encontramos que o gap de energia é dado por  $g_T(s) = g(s)$ , onde  $g(s)$  é o gap de energia do TQ de 1 q-bit. Uma consequência imediata de tal resultado é que  $g_{T\text{mín}} = \min_{s \in [0,1]} g_T(s) \neq 0$ .

Como nos casos anteriores, a degenerescência é a barreira que encontramos ao afirmar que o TQ acontece. Mas o uso das simetrias do Hamiltoniano  $H_{\text{mult}}(s)$  pode ser usado para nos auxiliar e mostrar que o TQ, de fato, acontece. Cada setor que é dirigido independentemente pelo Hamiltoniano  $H_k(s)$  possui duas simetrias, e podemos combinar todas elas para definir os operadores de paridade total e inversão de paridade total dados, respectivamente, por

$$\Pi_{zT} = \bigotimes_{i=1}^n \Pi_{zi} , \quad (87)$$

$$\Pi_{xT} = \bigotimes_{i=1}^n \Pi_{xi} , \quad (88)$$

onde  $\Pi_{zi} = Z_i Z_{c_A^i} Z_{c_B^i}$  e  $\Pi_{xi} = X_i X_{c_A^i} X_{c_B^i}$  são os operadores paridade e inversão de paridade, respectivamente, do setor  $i$ . O procedimento para mostrar que o TQ acontece é similar ao que foi feito nos casos anteriores. Usam-se as simetrias do sistema como um todo e as simetrias de cada setor individual para mostrar que existem conjuntos de paridade que evoluem independente dos demais, assim os coeficientes  $a_{k_1 \dots k_n}$  não devem se misturar. Usamos, também, a unitariedade da evolução e assim podemos mostrar que o TQ deve acontecer. Depois de todo esse processo, nós compararmos o estado inicial e final afim de verificar como os estados e coeficientes se relacionam no início e final da evolução. Assim como nos casos anteriores, nós obtemos ao final do processo que o estado das partículas do Bob é o estado  $|\psi_n\rangle$  a menos de uma fase global.

### 3.3.4 Portas quânticas de 1 q-bit via TQ

Um primeiro passo para mostrar que o TQ adiabático pode ser usado para realizar CQ universal é mostrar que portas de 1 q-bit podem ser implementadas pelo modelo. Aqui nós discutiremos detalhadamente como implementar portas de 1 q-bit via TQ adiabático. Relembrando que no TQ de portas nós consideramos que ambas as partes, Alice e Bob, não tem poder computacional, de modo que Charlie (um terceiro agente) deve fornecer os recursos necessários para que a tarefa possa ser executada. Assim, antes de tudo, deixe-nos analisar o ponto inicial e final do processo

para que possamos construir melhor o aparato teórico que nos permita realizar o que propomos.

Para que seja caracterizado o TQ de portas, Alice deve receber um estado  $|\psi\rangle$  e ao final do processo esse estado deve ser teleportado para a partícula do Bob, mas com a condição adicional de que o estado da partícula do Bob deve ser  $U|\psi\rangle$ , para algum unitário  $U$  de 1 q-bit. Desejando realizar esse procedimento adiabaticamente, o Hamiltoniano ao final do processo deve ser tal que  $U|\psi\rangle$  seja um autoestado deste. O Hamiltoniano proposto para o TQ adiabático permite isto, porém o segredo está no Hamiltoniano adiabático inicial. Antes de discutirmos como fazer tal tarefa, deixe-nos mencionar a seguinte proposição [50].

**Proposição 1** *Seja  $A$  um operador que satisfaz a relação de autovalor  $A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$ . Então dado um operador  $A(U)$  tal que  $A(U) = UA U^\dagger$ , para algum unitário  $U$ , nós temos que*

$$A(U)|a_n(U)\rangle = a_n|a_n(U)\rangle \quad (89)$$

*é a relação de autovalor para  $A(U)$ , onde  $|a_n(U)\rangle = U|a_n\rangle$ .*

A proposição acima garante que se rodarmos, unitariamente por  $U$ , um Hamiltoniano  $H(t)$  que governa a evolução do estado de um sistema dado  $|\psi(t)\rangle$ , então nessa nova base o sistema deve evoluir de forma que seu estado é  $U|\psi(t)\rangle$ . Assim, para implementar portas de um q-bit adiabaticamente nós definimos o Hamiltoniano

$$H(s, U) = UH(s)U^\dagger, \quad (90)$$

onde denotamos  $U = \mathbb{1}_{12}U_3$ , com  $U^\dagger U = \mathbb{1}_{123}$ . Note que devido a forma de  $H_{\text{fin}}$  nós ainda podemos escrever

$$H(s, U) = \eta_i(s)H_{\text{ini}}(U) + \eta_f(s)H_{\text{fin}}, \quad (91)$$

onde  $H_{\text{ini}}(U) = UH_{\text{ini}}U^\dagger$ , e com  $H_{\text{ini}}$  e  $H_{\text{fin}}$  sendo dados pelas Eqs. (34) e (35), respectivamente. Portanto, mostra-se que o Hamiltoniano que implementará a porta  $U$  no estado  $|\psi\rangle$  ao final do processo é exatamente o Hamiltoniano do TQ rodado pela porta  $U$ .

O ponto crucial é que, devido a essa mudança, o estado inicial do sistema não mais será  $|\psi\rangle_1|\beta_{00}\rangle_{23}$ , pois claramente vemos que  $|\psi\rangle_1|\beta_{00}\rangle_{23}$  não é autoestado de  $H_{\text{ini}}(U)$ , pois da Proposição 1 o autoestado fundamental de  $H_{\text{ini}}(U)$  deve ser  $|\psi\rangle_1(\mathbb{1}_2U_3)|\beta_{00}\rangle_{23}$ . Como admitimos que o Bob não deve ter poder computacional, isso significa que o estado recurso dado por Charlie para Alice e Bob é um estado de Bell rodado da forma  $|\beta_{00}\rangle_U = (\mathbb{1}_2U_3)|\beta_{00}\rangle$ . Além disso, a Proposição 1 nos ajuda a concluir também que o espectro do Hamiltoniano  $H(s, U)$  é idêntico ao espectro de  $H(s)$ , consequentemente o gap mínimo de  $H(s, U)$  é não nulo, pois o gap de  $H(s, U)$  é dado pela Eq. (40).

Considerando que o estado inicial do sistema é  $|\psi\rangle_1(\mathbb{1}_2U_3)|\beta_{00}\rangle_{23}$ , devemos mostrar agora que o estado ao final da evolução será dado por  $|\beta_{00}\rangle_{12}U_3|\psi\rangle_3$ . Como os Hamiltonianos  $H(s, U)$  e  $H(s)$  compartilham de espectros idênticos, então  $H(s, U)$  também é duplamente degenerado,

assim novamente nós não podemos assegurar que o TQ acontece apenas usando o teorema adiabático. Então deixe-nos repetir a análise das simetrias do Hamiltoniano adiabático.

**As simetrias do Hamiltoniano e sua forma matricial** Aqui as simetrias do Hamiltoniano e sua forma matricial serão obtidas de forma mais direta fazendo, primeiramente, o uso da seguinte proposição (veja Apêndice B).

**Proposição 2** *Sejam  $A$  e  $B$  operadores que satisfazem a relação de comutação  $[A, B] = 0$ . Então dados os novos operadores  $A(U)$  e  $B(U)$  tais que  $A(U) = UAU^\dagger$  e  $B(U) = UBU^\dagger$ , para algum unitário  $U$ , nós temos que  $[A(U), B(U)] = 0$ .*

Basicamente a proposição acima nos diz que se conhecemos as simetrias de um dado Hamiltoniano  $H(s)$ , então nós sempre podemos conhecer facilmente as simetrias de qualquer outro Hamiltoniano  $H(s, U) = UH(s)U^\dagger$ , para qualquer unitário  $U$ . Nós já sabemos que  $H(s)$  possui as simetrias  $\Pi_z = ZZZ$  e  $\Pi_x = XXX$ , portanto nós podemos usar a Proposição 2 para assegurar que as simetrias de  $H(s, U)$  são  $\Pi_z(U) = Z_1Z_2(U_3Z_3U_3^\dagger)$  e  $\Pi_x(U) = X_1X_2(U_3X_3U_3^\dagger)$ . Considerando um estado da base computacional  $|mnk\rangle$  que, como definimos, é autoestado do operador paridade  $\Pi_z$ , agora nós usamos a proposição 1 para definir a base *computacional rodada* dados por

$$|mnk, U\rangle = |mn\rangle_{12} U_3 |k\rangle_3, \quad (92)$$

de modo que são válidas as relações

$$\Pi_z(U) |mnk, U\rangle = (-1)^{m+n+k} |mnk, U\rangle, \quad (93)$$

$$\Pi_x(U) |mnk, U\rangle = |\bar{m}\bar{n}\bar{k}, U\rangle, \quad (94)$$

onde analogamente aos operadores  $\Pi_z$  e  $\Pi_x$ , nós temos  $\Pi_z(U)$  e  $\Pi_x(U)$  definidos como operadores de *paridade* e *inversão de paridade* na nova base *rodada*, respectivamente. Ainda mantemos a notação  $|mnk, U\rangle_+$  e  $|\bar{m}\bar{n}\bar{k}, U\rangle_-$  para estados de paridade  $+1$  e  $-1$ , respectivamente, do operador  $\Pi_z(U)$ . A forma matricial de  $H(s, U)$  também pode ser estudada como fizemos para obter a forma matricial de  $H(s)$ . Na nova base computacional rodada o Hamiltoniano é bloco diagonal devido a simetria em  $\Pi_z(U)$ , assim como  $H(s)$  é na base computacional não rodada devido a simetria em  $\Pi_z$ . A simetria em  $\Pi_x(U)$  pode ser usada também para garantir que esses blocos que compõe  $H(s, U)$  são idênticos. Esses resultados também podem serem obtidos fazendo uma outra forma de análise como segue.

Sejam  $h_{mnk}^{m'n'k'}(s)$  e  $h_{mnk}^{m'n'k'}(s, U)$  elementos de matrizes de  $H(s)$  na base computacional antiga e  $H(s, U)$  na base nova, respectivamente. Então deixe-nos escrever os elementos de matriz de  $H(s, U)$  na nova base como

$$h_{mnk}^{m'n'k'}(s, U) = \langle mnk, U | H(s, U) | m'n'k', U \rangle.$$

Usando que  $H(s, U) = UH(s)U^\dagger$ ,  $|mnk, U\rangle = |mn\rangle_{12} U_3 |k\rangle_3$  e que  $U$  é um unitário, obtemos portanto

$$h_{mnk}^{m'n'k'}(s, U) = \langle mnk|H(s)|m'n'k'\rangle ,$$

que nada mais são do que os elementos de matriz do Hamiltoniano  $H(s)$  na base computacional não rodada. Assim nós provamos que, na nova base rodada, o Hamiltoniano  $H(s, U)$  não somente é bloco diagonal (como sugerem as simetrias  $\Pi_z(U)$  e  $\Pi_x(U)$ ) como também tem a mesma forma matricial que o Hamiltoniano toma quando determinado na base não rodada.

**O estado final** Deixe-nos adotar o estado inicial do sistema como  $|\psi\rangle_1 (\mathbb{1}_2 U_3) |\beta_{00}\rangle_{23}$  e o estado final escrito sob a forma  $|\beta_{00}\rangle_{12} U_3 |\bar{\psi}\rangle_3$  onde escrevemos  $|\bar{\psi}\rangle = \alpha(a, b)|0\rangle + \beta(a, b)|1\rangle$ , devido a degenerescência de  $H(s, U)$ . Então, o estado inicial  $|\phi(0, U)\rangle$  e final  $|\phi(1, U)\rangle$  são, respectivamente, dados por

$$|\phi(0, U)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [a(|000, U\rangle + |011, U\rangle) + b(|100, U\rangle + |111, U_3\rangle)]_{123} , \quad (95)$$

$$|\phi(1, U)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(a, b)(|000, U\rangle + |110, U\rangle) + \beta(a, b)(|001, U\rangle + |111, U\rangle)]_{123} . \quad (96)$$

A simetria em  $\Pi_z(U)$  é a responsável por garantir que os coeficientes que multiplicam estados de paridade distintas não se "misturam". As Eqs. (95) e (96) nos permite perceber que em  $|\phi(0, U)\rangle$  e  $|\phi(1, U)\rangle$  os coeficientes  $a$  ( $b$ ) e  $\alpha(a, b)$  ( $\beta(a, b)$ ) multiplicam estados de paridade  $+1$  ( $-1$ ) em  $\Pi_z(U)$ . Assim já escrevemos que  $\alpha(a, b) = \alpha(a)$  e  $\beta(a, b) = \beta(b)$ . Como rotações unitárias não alteram a norma de um estado e como a evolução é unitária, nós podemos escrever  $|\alpha(a)|^2 + |\beta(b)|^2 = |a|^2 + |b|^2$ , donde tiramos as seguintes igualdades  $\alpha(a) = ae^{i\theta_a}$  e  $\beta(b) = be^{i\theta_b}$ . Por fim usamos a simetria em  $\Pi_x(U)$  para garantir que os estados, independente da paridade, evoluem de forma equivalente. Portanto nós escrevemos  $\alpha(a) = ae^{i\theta}$  e  $\beta(b) = be^{i\theta}$ , consequentemente o estado final fica da forma

$$|\phi(1, U)\rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} [a(|000, U\rangle + |110, U\rangle) + b(|001, U\rangle + |111, U\rangle)]_{123} , \quad (97)$$

onde ainda podemos usar que  $|mnk, U\rangle = |mn\rangle_3 U_3 |k\rangle_3$  para mostrar que o estado final é, a menos de uma fase global  $\theta$ , dado por  $|\beta_{00}\rangle_{12} U_3 |\psi\rangle_3$ . Em conclusão mostramos que portas de 1 q-bit podem ser implementadas apenas fazendo uma "rotação"(transformação unitária) no Hamiltoniano que depende da porta a ser implementada, onde um estado de Bell  $\mathbb{1}_2 U_3 |\beta_{00}\rangle_{23}$  deve ser dado como recurso para Alice e Bob.

### 3.3.5 Portas quânticas de 2 q-bits via TQ

Para finalizar a demonstração de que o TQ pode ser usado para realizar computação universal, nós precisamos mostrar que portas de 2 q-bits também podem ser implementadas. Para isso

nós combinamos o duplo TQ, visto na seção 3.3.2, com as Proposições 1 e 2. O nosso sistema novamente será composto de 6 q-bits e é idêntico ao esquema apresentado no duplo TQ.

Primeiro deixe-nos definir o unitário  $U_{\text{dup}} = \mathbb{1}_{1234} U_{56}$  que atuará sobre os q-bit físicos 5 e 6, que é onde desejamos aplicar a porta ao final da computação. Então para que o sistema termine no estado por  $|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} U_{56} |\psi_2\rangle_{56}$ , com a porta  $U_{56}$  aplicada no estado  $|\psi_2\rangle_{56}$ , o Hamiltoniano que deverá governar o sistema é

$$H_D(s, U) = U_{\text{dup}} H_D(s) U_{\text{dup}}^\dagger, \quad (98)$$

onde inicialmente o sistema deve ser rodado pela porta  $U_{\text{dup}}$  de modo que o estado inicial seja  $|\psi_2\rangle_{12} (\mathbb{1}_{34} U_{56}) |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35}$ . Em geral a porta  $U_{\text{dup}}$  pode ser qualquer, desde uma porta controlada (como a porta CNOT) ou o produto de duas unitárias que atuam nos q-bits físicos 5 e 6 independentemente (como uma porta qualquer  $A_5 B_6$ , para unitários  $A$  e  $B$ ). Essa é a nossa primeira extensão do modelo do Bacon e Flammia, onde eles mostram a implementação apenas da porta de fase-controlada [41].

Considerando que o estado inicial do sistema é  $|\psi_2\rangle_{12} (\mathbb{1}_{34} U_{56}) |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35}$  e que o sistema evolui adiabaticamente segundo o Hamiltoniano  $H_D(s, U)$ , o estado final do sistema deverá ser  $|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} U_{56} |\psi_2\rangle_{56}$ . Como o Hamiltoniano  $H_D(s, U)$  difere de  $H_D(s)$  por uma transformação unitária, novamente nos deparamos com um Hamiltoniano degenerado e devemos novamente analisar com cuidado a evolução a fim de ver como garantir que o estado final realmente seja  $|\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} U_{56} |\psi_2\rangle_{56}$ . Vale mencionar que o gap mínimo de  $H_D(s, U)$  é não nulo, uma vez que o gap mínimo de  $H_D(s)$  é não nulo.

**As simetrias do Hamiltoniano e sua forma matricial** Vimos que no duplo TQ nós temos algumas simetrias que nos ajudaram a contornar o obstáculo imposto pela degenerescência do Hamiltoniano. De forma análoga ao que foi feito no TQ de unitários de 1 q-bit, nós também faremos uso da Proposição 2 para encontrar as simetrias do Hamiltoniano  $H_D(s, U)$ .

Das Eqs. (62), (63), (65) e (66) e usando a Proposição 2, conclui-se facilmente que as simetrias de  $H_D(s, U)$  são

$$\Pi_z^P(U) \mathbb{1}^I = Z_2 Z_4 U_{56} (\mathbb{1}_5 Z_6) U_{56}^\dagger, \quad \Pi_x^P(U) \mathbb{1}^I = X_2 X_4 U_{56} (\mathbb{1}_5 X_6) U_{56}^\dagger, \quad (99)$$

$$\mathbb{1}^P \Pi_z^I(U) = Z_1 Z_3 U_{56} (Z_5 \mathbb{1}_6) U_{56}^\dagger, \quad \mathbb{1}^P \Pi_x^I(U) = X_1 X_3 U_{56} (X_5 \mathbb{1}_6) U_{56}^\dagger, \quad (100)$$

para cada setor individualmente, e

$$\Pi_z^D(U) = \Pi_z^P(U) \Pi_z^I(U) = U_{\text{dup}} Z_2 Z_4 Z_6 Z_1 Z_3 Z_5 U_{\text{dup}}^\dagger, \quad (101)$$

$$\Pi_x^D(U) = \Pi_x^P(U) \Pi_x^I(U) = U_{\text{dup}} X_2 X_4 X_6 X_1 X_3 X_5 U_{\text{dup}}^\dagger, \quad (102)$$

para o sistema como um todo. Ao mudarmos de base nós não teremos mais os estados da base computacional como autoestados dos novos operadores  $\Pi_z^D(U)$  e  $\Pi_x^D(U)$ . Motivados por essa



mudança, nós definimos os novos estados da base computacional no sistema "rodado" como denotados por  $|n_2 n_4 \mathbf{n}_6\rangle |n_1 n_3 \mathbf{n}_5\rangle = U_{\text{dup}} |n_2 n_4 n_6\rangle |n_1 n_3 n_5\rangle$ , de forma que ainda mantém-se os dois conjuntos de autoestados de paridades  $+1$  e  $-1$  do operador  $\Pi_z^D(U)$  denotados, respectivamente, por  $\{|n_2 n_4 \mathbf{n}_6\rangle_{\pm} |n_1 n_3 \mathbf{n}_5\rangle_{\pm}\}$  e  $\{|n_2 n_4 \mathbf{n}_6\rangle_{\pm} |n_1 n_3 \mathbf{n}_5\rangle_{\mp}\}$ , na nova base. Os elementos em *negrito* indicam que, na nova base, os estados dos q-bits 5 e 6 são modificados de modo que podem ser superposições dos estados da base original (não rodada). Devido a esse conjunto de simetrias com  $\Pi_z^P(U)$ ,  $\Pi_z^I(U)$  e  $\Pi_z^D(U)$  o Hamiltoniano  $H_D(s, U)$  pode ser expresso na base computacional rodada na forma bloco diagonal. Por outro lado as simetrias em  $\Pi_x^P(U)$ ,  $\Pi_x^I(U)$  e  $\Pi_x^D(U)$  sugerem que, nesta nova base rodada, os blocos que compõem a diagonal do Hamiltoniano  $H_D(s, U)$  sejam idênticos.

Mais uma vez nós podemos determinar os elementos de matrizes de  $H_D(s, U)$  na base computacional rodada  $\{|n_2 n_4 \mathbf{n}_6\rangle |n_1 n_3 \mathbf{n}_5\rangle\}$  e mostrar que este tem a mesma forma matricial que  $H_D(s)$  quando escrito na base não rodada  $\{|n_2 n_4 n_6\rangle |n_1 n_3 n_5\rangle\}$ . Para isso, devemos usar que  $U$  é um unitário que atua apenas sobre os q-bits 5 e 6. Portanto, desde que nós ordenemos adequadamente a base, a forma matricial de  $H_D(s, U)$  na nova base rodada é dada pela Eq. (69).

**O estado final** Deixe-nos escrever o estado inicial do sistema como

$$\begin{aligned} |\phi_2(0, U)\rangle &= a_1 |00\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} + a_2 |01\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} , \\ &+ a_3 |10\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} + a_4 |11\rangle_{12} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} , \end{aligned}$$

onde  $|\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} = U_{56} |\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35}$  e consequentemente

$$|\beta_{00}\rangle_{46} |\beta_{00}\rangle_{35} = \frac{1}{2} (|00\rangle |00\rangle + |00\rangle |11\rangle + |11\rangle |00\rangle + |11\rangle |11\rangle)_{4635} .$$

Por outro lado, o estado final é dado por

$$\begin{aligned} |\bar{\phi}_2(1, U)\rangle &= \alpha_1 |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\mathbf{00}\rangle_{56} + \alpha_2 |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\mathbf{01}\rangle_{56} , \\ &+ \alpha_3 |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\mathbf{10}\rangle_{56} + \alpha_4 |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} |\mathbf{11}\rangle_{56} , \end{aligned}$$

Como já sabemos, o estado  $|n_2 n_4 \mathbf{n}_6\rangle |n_1 n_3 \mathbf{n}_5\rangle$  tem a mesma paridade que  $|n_2 n_4 n_6\rangle |n_1 n_3 n_5\rangle$ , pois  $|n_2 n_4 \mathbf{n}_6\rangle |n_1 n_3 \mathbf{n}_5\rangle = U_{\text{dup}} |n_2 n_4 n_6\rangle |n_1 n_3 n_5\rangle$ . Assim, nós podemos novamente usar a comparação entre  $|\phi_2(0, U)\rangle$  e  $|\bar{\phi}_2(1, U)\rangle$  para analisar como evoluem os coeficientes que multiplicam estados de mesma paridade. Ainda podemos reescrever  $|\phi_2(0, U)\rangle$  e  $|\bar{\phi}_2(1, U)\rangle$  da seguinte forma

$$|\phi_2(0, U)\rangle = a_1 |++, U\rangle_{PI} + a_2 |+-, U\rangle_{PI} + a_3 |+-, U\rangle_{PI} + a_4 |--, U\rangle_{PI} , \quad (103)$$

$$|\bar{\phi}_2(1, U)\rangle = \alpha_1 |++, U\rangle_{PI} + \alpha_2 |+-, U\rangle_{PI} + \alpha_3 |+-, U\rangle_{PI} + \alpha_4 |--, U\rangle_{PI} , \quad (104)$$

onde  $|xy, U\rangle_{PI} = U_{\text{dup}} |xy\rangle_{PI}$ , com  $|xy\rangle_{PI} = |x\rangle_P |y\rangle_I$ , onde  $|x\rangle_P$  é uma superposição de estados

do setor par de paridade  $x$  e  $|y\rangle_I$  uma superposição de estados do setor ímpar de paridade  $y$ . Note que cada um dos coeficientes  $a_i$  de  $|\phi_2(0, U)\rangle$  não se misturam durante a evolução, pois nessa nova base as simetrias em  $\Pi_z^P(U)$ ,  $\Pi_z^I(U)$  e  $\Pi_z^D(U)$  nos garantem que isso não acontece. Assim, cada coeficiente  $|\bar{\phi}_2(1, U)\rangle$  pode ser escrito apenas como  $\alpha_n = \alpha_n(a_n)$ . A unitariedade da evolução que nos permite escrever  $\sum_{n=1}^4 |\alpha_n(a_n)|^2 = \sum_{n=1}^4 |a_n|^2$ , cuja solução nos fornece as relações entre  $\alpha_n(a_n)$  e  $a_n$  dadas por  $\alpha_n(a_n) = a_n e^{i\theta_n}$ , para algum  $\theta_n$  real. Já que cada parâmetro  $\theta_n$  carrega a informação de como cada bloco de estados evoluem independentemente, novamente entra o uso das simetrias que são as simetrias em  $\Pi_x^P(U) \mathbb{1}^I$ ,  $\mathbb{1}^P \Pi_x^I(U)$  e  $\Pi_x^D(U)$ . Essas simetrias nessa nova base também nos diz que independente de como os estados  $|xy\rangle_{PI}$  evoluem, eles evoluem da mesma forma e conseqüentemente as fases  $\theta_n$ 's são todas iguais. Isso é o bastante para nos assegurarmos que o estado final do sistema é exatamente dado por  $|\phi_2(1, U)\rangle = |\beta_{00}\rangle_{24} |\beta_{00}\rangle_{13} U_{56} |\psi_2\rangle_{56}$ .

### 3.3.6 Portas quânticas de $n$ q-bits via TQ

Com o objetivo de construir um modelo que nos permita realizar diferentes designers para a CQ universal, nós mostraremos que o TQ adiabático também nos permite implementar portas de  $n$  q-bits. Os casos com  $n = 1$  e  $n = 2$  já foram mostrados, aqui generalizaremos esses resultados.

Nós desejamos iniciar o sistema da Alice como sendo o estado  $|\psi_n\rangle$  dado na Eq. (79) e que ao final do processo esse estado seja enviado para o Bob com uma porta  $U_n$  de  $n$ -qbits aplicada. Isso é possível se nós iniciarmos nosso sistema no estado

$$|\phi_n(0, U)\rangle = |\psi_n\rangle U_n |\beta_{00}\rangle_{c_1^1 c_2^1} \cdots |\beta_{00}\rangle_{c_1^n c_2^n}, \quad (105)$$

e deixar o sistema evoluir segundo o Hamiltoniano

$$H_{\text{mult}}(s, U) = U_n \sum_{k=1} \mathcal{H}_k(s) U_n^\dagger, \quad (106)$$

onde  $\mathcal{H}_j(s) = [\otimes_{i=1}^{j-1} \mathbb{1}_i] \otimes H_j(s) \otimes [\otimes_{i=j+1}^n \mathbb{1}_i]$ , com  $H_j(s)$  sendo dado pela Eq. (84). Novamente nós deixamos livre que a porta  $U_n$  seja qualquer.

Como os Hamiltonianos  $H_{\text{mult}}(s)$  e  $H_{\text{mult}}(s, U)$  diferem por uma transformação unitária, isso deve manter invariante o espectro de  $H_{\text{mult}}(s)$  e, portanto,  $H_{\text{mult}}(s, U)$  é degenerado. O gap de energia de  $H_{\text{mult}}(s, U)$  é dado por  $g_T(s) = g(s)$ , onde  $g(s)$  é o gap de energia do TQ de 1 q-bit.

As simetrias nessa nova base são também rodadas de modo que as novas simetrias no caso de portas de  $n$  q-bit são dadas por

$$\Pi_{zT}(U) = U_n \Pi_{zT} U_n^\dagger = U_n \bigotimes_{i=1}^n \Pi_{zi} U_n^\dagger, \quad (107)$$

$$\Pi_{xT}(U) = U_n \Pi_{xT} U_n^\dagger = U_n \bigotimes_{i=1}^n \Pi_{xi} U_n^\dagger, \quad (108)$$

onde  $\Pi_{zi} = Z_i Z_{c_A^i} Z_{c_B^i}$  e  $\Pi_{xi} = X_i X_{c_A^i} X_{c_B^i}$  são os operadores paridade e inversão de paridade, respectivamente, do setor  $i$ . Além das simetrias mostradas acima nós temos também as simetrias de cada setor que são modificadas e dadas por  $\Pi_{zi}(U) = U_n \Pi_{zi} U_n^\dagger$  e  $\Pi_{xi}(U) = U_n \Pi_{xi} U_n^\dagger$ . Essas simetrias podem ser usadas para mostrar que o estado final do sistema será dado por  $|\phi_n(1, U)\rangle = |\Phi_n\rangle_A U_n |\psi_n\rangle_B$  a menos de uma fase global.

Assim concluímos a nossa generalização do modelo apresentado por Bacon e Flammia. Como esse modelo foi desenvolvido de modo a usar o TQ para implementar adiabaticamente as portas, o número de q-bits requerido pelo modelo é de 3 q-bits para cada setor. Manipular uma grande quantidade de q-bits nem sempre é fácil, mas desde que seja possível, nós temos um modelo de computação adiabática para simular o modelo de circuitos.

## 4 Computação Quântica Universal por Evoluções Adiabáticas Controladas.

Neste capítulo nós mostraremos um modelo alternativo ao modelo apresentado anteriormente para implementar portas quânticas adiabaticamente. Na seção 4.1 nós discutiremos sobre evoluções adiabáticas controladas (EAC) de forma genérica. Em seguida, na seção 4.2, vamos apresentar o modelo de computação que faz uso de EAC proposto recentemente por Itay Hen [42] para implementar portas de 1 q-bit e portas controladas de 2 q-bits. Por fim na seção 4.3 nós apresentaremos uma extensão do modelo proposto em [42] mostrando como implementar portas  $n$ -controladas.

### 4.1 Evoluções Adiabáticas Controladas (EAC)

Como em toda evolução adiabática, consideremos um estado inicial que seja autoestado fundamental de um Hamiltoniano  $H^{\text{ini}}$  (independente do tempo). Usualmente, em evoluções adiabáticas, deixa-se o sistema evoluir por um Hamiltoniano dependente do tempo  $H(s)$ , que varia muito lentamente, até atingir o estado final que é autoestado fundamental de um Hamiltoniano  $H^{\text{fin}}$  (independente do tempo).

O sistema que usaremos para realizar EAC é um sistema bipartido ( $\mathcal{SA}$ ) composto por um subsistema *alvo*  $\mathcal{S}$  e um subsistema *auxiliar*  $\mathcal{A}$ . Para descrever a dinâmica do sistema  $\mathcal{SA}$ , considere um Hamiltoniano  $H^{\text{ini}}$  e o conjunto composto por  $k$  Hamiltonianos  $H_k^{\text{fin}}$ , todos independentes do tempo, que atuam sobre o subsistema  $\mathcal{A}$ . Então definimos o seguinte Hamiltoniano adiabático

$$H(s) = f(s) \mathbb{1} \otimes H^{\text{ini}} + g(s) \sum_k P_k \otimes H_k^{\text{fin}}, \quad (109)$$

que governará a dinâmica do sistema  $\mathcal{SA}$ . As funções  $f(s)$  e  $g(s)$  são funções de interpolação que satisfazem  $f(0) = g(1) = 1$  e  $f(1) = g(0) = 0$ . Os operadores  $P_k$  formam um conjunto completo de projetores ortogonais do espaço onde reside o subsistema  $\mathcal{S}$  (isto é, vale a relação  $P_k P_m = \delta_{mk} P_k$ ). Outra forma de escrever o Hamiltoniano  $H(s)$  é

$$H(s) = \sum_k P_k \otimes [f(s) H^{\text{ini}} + g(s) H_k^{\text{fin}}], \quad (110)$$

onde usa-se que  $\sum_k P_k = \mathbb{1}$ . Vale notar que quando  $s = 0$  e  $s = 1$  o Hamiltoniano que atua sobre o sistema é  $H(0) = \mathbb{1} \otimes H^{\text{ini}}$  e  $H(1) = \sum_k P_k \otimes H_k^{\text{fin}}$ , respectivamente. Desde que o sistema evolua adiabaticamente o estado do sistema evoluirá do estado  $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle |a.f.^{\text{ini}}\rangle$  (com  $|a.f.^{\text{ini}}\rangle$  sendo autoestado fundamental de  $H^{\text{ini}}$ ) para o estado final  $|\Psi(1)\rangle$  onde

$$|\Psi(1)\rangle = \sum_k P_k |\psi\rangle \otimes |k_{\text{fin}}\rangle, \quad (111)$$

com  $|k_{\text{fin}}\rangle$  sendo o autoestado fundamental do  $k$ -ésimo Hamiltoniano  $H_k^{\text{fin}}$ . O estado inicial  $|\psi\rangle$  do subsistema  $\mathcal{S}$  é um estado desconhecido, ao passo que cada autoestado  $|k_{\text{fin}}\rangle$  do subsistema  $\mathcal{A}$  é conhecido. Nota-se que o estado  $|\Psi(1)\rangle$  caracteriza um estado emaranhado do sistema, de modo que não podemos caracterizar totalmente o subsistema  $\mathcal{A}$  em separado do subsistema  $\mathcal{S}$ .

Suponha, portanto, que ao final do processo realizamos uma medida sobre o subsistema  $\mathcal{A}$ , então é sabido que essa medida implicará no colapso do sistema  $\mathcal{SA}$  para um estado que depende do resultado da medida realizada sobre  $\mathcal{A}$ . Dos postulados da Mecânica quântica podemos mostrar que realizando uma medida, representada pelo conjunto de operadores de medida  $M_k = |k_{\text{fin}}\rangle\langle k_{\text{fin}}|$  associados aos resultados  $m_k$ , sobre o subsistema  $\mathcal{A}$  o estado do sistema imediatamente colapsará para o estado

$$|\Psi(1)_{k\text{-medido}}\rangle = \frac{(\mathbb{1} \otimes M_k) |\Psi(1)\rangle}{\sqrt{p_k}} = \frac{P_k |\psi\rangle \otimes |k_{\text{fin}}\rangle}{\sqrt{p_k}}, \quad (112)$$

onde  $p_k = \langle \Psi(1) | M_k | \Psi(1) \rangle = \langle \psi | P_k | \psi \rangle$  é a probabilidade de obtermos  $m_k$  como resultado da medida. Um resultado imediato dessa análise é que se o estado  $|\psi\rangle$  do subsistema  $\mathcal{S}$  vive no espaço projetado por algum projetor  $P_k$ , então  $P_l |\psi\rangle = \delta_{kl} |\psi\rangle$ , como observado na Ref. [42].

## 4.2 Portas de 1 e 2 q-bits via EAC

Nesta seção nós usaremos os resultados analisados anteriormente para mostrar como implementar rotações de 1 q-bit e rotações controladas por 1 q-bit. Ao final daremos exemplos que ilustram a forma como devemos proceder ao usar EAC para realizar CQ universal.

### 4.2.1 Unitários de um 1 q-bit via EAC

Para mostrar como implementar portas (rotações) de 1 q-bit usando EAC, consideraremos o sistema  $\mathcal{SA}$  composto do subsistema alvo ( $\mathcal{S}$ ) e auxiliar ( $\mathcal{A}$ ) que são compostos por 1 q-bit, cada. Como o nome sugere, o sistema alvo será o sistema no qual realizaremos a computação e o sistema auxiliar é o sistema onde realizamos a medida. Assim o sistema  $\mathcal{S}$  deve iniciar-se sempre em um estado qualquer  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , enquanto que o subsistema  $\mathcal{A}$  pode iniciar no estado que queiramos, onde usaremos que o estado inicial do sistema  $\mathcal{A}$  é  $|0\rangle$ . A razão pela qual o subsistema  $\mathcal{S}$  deve iniciar-se sempre em um estado qualquer, é que para realizar CQ universal nós devemos ter um modelo capaz de implementar portas em estados desconhecidos.

Como uma porta quântica de 1 q-bit pode ser vista como uma rotação de um determinado ângulo  $\phi$  em torno de uma direção  $\hat{n}$ , precisamos apenas mostrar como realizar essa rotação. Assim, deixe-nos iniciar o sistema no estado input  $|\psi_{\text{inp}}\rangle = |\psi\rangle |0\rangle$ . O Hamiltoniano que deve agir sobre o sistema  $\mathcal{SA}$  que nos permite implementar rotações de um ângulo  $\phi$  em torno de uma direção arbitrária  $\hat{n}$ , na esfera de Bloch, sobre um q-bit é dado por

$$H(s) = P_{\hat{n}_+} \otimes H_0(s) + P_{\hat{n}_-} \otimes H_\phi(s), \quad (113)$$

onde  $H_0(s)$  e  $H_\phi(s)$  podem ser obtidos de

$$H_\xi(s) = -\hbar\omega \left\{ \cos[\theta(s)]\sigma_z + \sin[\theta(s)] \left[ \sigma_x \cos \xi + \sigma_y \sin \xi \right] \right\} , \quad (114)$$

fazendo  $\xi = 0$  e  $\xi = \phi$ , respectivamente, onde  $\theta(s) = \theta_0 s$ , com  $s = t/T$ ,  $T$  sendo o tempo total de evolução e  $\theta_0$  um parâmetro cujo significado físico ficará mais claro em seguida. Os projetores  $P_{\hat{n}_\pm}$  são projetores ortogonais sobre o espaço de estados do sistema  $\mathcal{S}$  e dados por  $P_{\hat{n}_\pm} = |\hat{n}_\pm\rangle\langle\hat{n}_\pm|$  com  $|\hat{n}_\pm\rangle$  sendo um estado na esfera de Bloch que aponta na direção de um dado versor  $\hat{n}$ . Em termos das matrizes de Pauli  $\sigma_i$ , com  $i = \{x, y, z\}$ , nós temos  $|\hat{n}_\pm\rangle\langle\hat{n}_\pm| = 1/2 (\mathbb{1} \pm \hat{n} \cdot \vec{\sigma})$ , onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ .

Para garantir que o Hamiltoniano da Eq. (113) permite-nos realizar uma evolução adiabática, é necessário mostrar que o mesmo possui um *gap* não nulo de energia entre seus níveis fundamental e primeiro excitado. Calculando o espectro (energias)  $E_n(s)$  de  $H_\xi(s)$  nós obtemos  $E_\pm(s) = E_\pm = \pm\hbar\omega$ , onde o estado  $|\psi\rangle|0\rangle$  é autoestado de  $H(0)$  com energia  $-\hbar\omega$ . Logo temos garantido que o *gap* é não nulo e independente dos parâmetros  $\xi$  e  $\theta_0$  e das componentes vetor  $\hat{n}$ .

Para estudarmos como se dá a evolução do sistema, deixe-nos escrever o estado inicial do sistema  $\mathcal{S}$  na base  $\{|\hat{n}_\pm\rangle\}$  como  $|\psi\rangle = \alpha|\hat{n}_+\rangle + \beta|\hat{n}_-\rangle$ . Ao final da evolução adiabática o estado do sistema  $\mathcal{SA}$  será um estado final  $|\Psi(1)\rangle$  que é autoestado de  $H(1)$  com autovalor  $-\hbar\omega$  e, segundo a Eq. (111), é dado por

$$|\Psi(1)\rangle = P_{\hat{n}_+}|\psi\rangle \otimes |E_0^0(1)\rangle + P_{\hat{n}_-}|\psi\rangle \otimes |E_\phi^0(1)\rangle , \quad (115)$$

onde  $|E_\xi^0(1)\rangle = \cos(\theta_0/2)|0\rangle + e^{i\xi}\sin(\theta_0/2)|1\rangle$  é autoestado fundamental de  $H_\xi(1)$ . Usando o fato de que  $|\psi\rangle$  pode escrito como uma combinação linear de estados que residem no espaço projetado pelos operadores  $P_{\hat{n}_\pm}$ , nós escrevemos

$$|\Psi(1)\rangle = \alpha|\hat{n}_+\rangle \otimes |E_0^0(1)\rangle + \beta|\hat{n}_-\rangle \otimes |E_\phi^0(1)\rangle , \quad (116)$$

ou equivalentemente

$$|\Psi(1)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)(\alpha|\hat{n}_+\rangle + \beta|\hat{n}_-\rangle) \otimes |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)(\alpha|\hat{n}_+\rangle + e^{i\phi}\beta|\hat{n}_-\rangle) \otimes |1\rangle , \quad (117)$$

onde vemos claramente que nos deparamos com um estado emaranhado. Note que se realizarmos uma medida sobre o sistema  $\mathcal{A}$  usando o conjunto de medidas  $M_m = |m\rangle\langle m|$ , onde  $|m\rangle$  é um estado da base computacional, nós podemos obter como resultado  $|0\rangle$  com probabilidade  $\cos^2(\theta_0/2)$  ou  $|1\rangle$  com probabilidade  $\sin^2(\theta_0/2)$ .

Se encontrarmos o estado  $|0\rangle$  como resultado da nossa medida sobre o subsistema  $\mathcal{A}$ , então consequentemente o estado do subsistema  $\mathcal{S}$  será exatamente o estado inicial  $|\psi\rangle = \alpha|\hat{n}_+\rangle + \beta|\hat{n}_-\rangle$ , assim o estado do sistema  $\mathcal{SA}$  fica exatamente como no início da evolução e portanto

a computação falha. Isso pode ser visto diretamente do fato que  $|\psi\rangle = \alpha|\hat{n}_+\rangle + \beta|\hat{n}_-\rangle$  nada mais é do que o estado  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  escrito na base  $\{|\hat{n}_\pm\rangle\}$ . Por outro lado, se após a medida o subsistema  $\mathcal{A}$  colapsar para o estado  $|1\rangle$ , então o subsistema  $\mathcal{S}$  colapsará para o estado  $|\psi_{\text{rod}}\rangle = \alpha|\hat{n}_+\rangle + e^{i\phi}\beta|\hat{n}_-\rangle$ , que é exatamente o resultado de uma rotação sobre o estado  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  de  $\phi$  em torno de uma direção  $\hat{n}$  na esfera de Bloch. Nesse caso temos o sucesso da computação. No caso onde o processo falha devemos realizar novamente a evolução usando o mesmo Hamiltoniano (já que o estado que obtemos é exatamente o estado inicialmente preparado). Assim, a probabilidade de falha do sistema, depois de  $j$  repetições, é  $\cos^{2j}(\theta_0/2)$  o que deve decrescer a medida que  $j$  cresce.

Com essa análise fica evidente o significado do parâmetro  $\theta_0$  como um *parâmetro de sucesso da computação*. No limite  $\theta_0 \rightarrow \pi$  podemos ver que a probabilidade de sucesso da computação torna-se maior, pois  $\sin^2(\theta_0/2) \rightarrow 1$ . Considerar o valor  $\theta_0 = \pi$  torna a medida, ao final da evolução, sobre o subsistema  $\mathcal{A}$  desnecessária, pois o estado final do sistema  $\mathcal{SA}$  é  $|\Psi(1, \theta_0 = \pi)\rangle = |\psi_{\text{rod}}\rangle \otimes |1\rangle$ . Embora tenhamos conhecimento desse resultado, nós não tomaremos valores para o parâmetro  $\theta_0$ , exceto em casos excepcionais onde devemos atribuir valores a este parâmetro.

#### 4.2.2 Portas controladas por 1 q-bit via EAC

Para implementar portas controladas por 1 q-bit o esquema é ligeiramente diferente do que vimos anteriormente para o caso de unitários (rotações) de 1 q-bit. Sabendo que portas *de* 1 q-bit controladas *por* 1 q-bit atuam num espaço de Hilbert de 2 q-bits, o nosso subsistema  $\mathcal{S}$  deverá ser composto por 2 q-bits físicos, os q-bits *controle* e *alvo*. Nós vamos considerar que desejamos implementar uma rotação sobre o q-bit *alvo* quando o estado do *controle* for  $|1\rangle$ . Deixe-nos escrever o estado inicial do subsistema  $\mathcal{S}$  como sendo o estado mais geral de dois qbits dado por

$$|\psi_2\rangle = a_1|00\rangle + a_2|01\rangle + a_3|10\rangle + a_4|11\rangle \quad , \quad (118)$$

onde  $\sum_i |a_i|^2 = 1$  é nossa condição de normalização e onde denotamos  $|n\rangle_{\text{con}} |m\rangle_{\text{alv}} = |nm\rangle$ , com  $|n\rangle_{\text{con}}$  e  $|m\rangle_{\text{alv}}$  sendo os estados do q-bit de controle e alvo, respectivamente. Considerando que a rotação será implementada no q-bit alvo, é conveniente escrever  $|\psi_2\rangle$  na base  $\{|m\hat{n}_\pm\rangle\}$ , onde  $m = \{0, 1\}$ . Fazendo isso, o estado  $|\psi_2\rangle$  fica escrito como

$$|\psi_2\rangle = \alpha_1|0\hat{n}_+\rangle + \alpha_2|0\hat{n}_-\rangle + \alpha_3|1\hat{n}_+\rangle + \alpha_4|1\hat{n}_-\rangle \quad . \quad (119)$$

Novamente o subsistema  $\mathcal{A}$  é inicializado no estado  $|0\rangle$ , de modo que o estado inicial do sistema seja  $|\psi_2\rangle|0\rangle$ . Para esse novo propósito, o Hamiltoniano que deverá governar o sistema é dado por

$$H(s) = \left[ |0\hat{n}_-\rangle\langle 0\hat{n}_-| + \sum_m P_{m\hat{n}_+} \right] \otimes H_0(s) + P_{1\hat{n}_-} \otimes H_\phi(s) \quad , \quad (120)$$

com  $P_{m\hat{n}_{\pm}} = |m\hat{n}_{\pm}\rangle\langle m\hat{n}_{\pm}|$ . Se notarmos que  $\sum_m \sum_v P_{m\hat{n}_v} = \mathbb{1}$ , onde  $v = \{\pm\}$ , uma forma alternativa de escrever o Hamiltoniano acima é

$$H(s) = [\mathbb{1} - P_{1\hat{n}_-}] \otimes H_0(s) + P_{1\hat{n}_-} \otimes H_{\phi}(s) . \quad (121)$$

Essa forma de escrever o Hamiltoniano será conveniente mais a frente. Assim, desde que o sistema evolua adiabaticamente, garantimos que o estado final do Hamiltoniano pode ser determinado com ajuda da Eq. (111) e é dado por

$$|\Psi_2(1)\rangle = (\alpha_1 |0\hat{n}_+\rangle + \alpha_2 |0\hat{n}_-\rangle + \alpha_3 |1\hat{n}_+\rangle) \otimes |E_0^0(1)\rangle + \alpha_4 |1\hat{n}_-\rangle \otimes |E_{\phi}^0(1)\rangle , \quad (122)$$

ou equivalentemente

$$|\Psi_2(1)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) |\psi_2\rangle \otimes |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) |\psi_2^{\text{rod}}\rangle \otimes |1\rangle , \quad (123)$$

onde  $|\psi_2^{\text{rod}}\rangle = \alpha_1 |0\hat{n}_+\rangle + \alpha_2 |0\hat{n}_-\rangle + \alpha_3 |1\hat{n}_+\rangle + e^{i\phi} \alpha_4 |1\hat{n}_-\rangle$  é exatamente o estado  $|\psi_2\rangle$  depois de uma rotação controlada de  $\phi$  em torno de uma direção  $\hat{n}$ . Finalizada a evolução, ao realizarmos a medida novamente sobre o subsistema  $\mathcal{S}$  teremos uma probabilidade  $\sin^2(\theta_0/2)$  de obtermos o estado computado.

Embora nossa discussão tenha sido feita considerando que o registro de ativação da porta controlada seja o estado  $|1\rangle$  do q-bit controle, isso não é uma exigência necessária. Qualquer porta controlada que atua quando o estado do q-bit controle for  $|0\rangle$  também é realizável pelo modelo. Para isso, basta fazer a troca  $P_{1\hat{n}_-} \rightarrow P_{0\hat{n}_-}$  no Hamiltoniano da Eq. (121) e deixar o sistema evoluir segundo esse novo Hamiltoniano, de modo que nenhuma mudança no estado inicial do sistema é necessária.

### 4.2.3 Portas Universais via EAC

É sabido que existem conjuntos de portas quânticas que são universais para a CQ [10]. Exemplos são os conjuntos universais  $\{CNOT + \text{Rotações de 1 q-bit}\}$  e  $\{CNOT + H + \text{porta } \frac{\pi}{8}\}$ . Já vimos que qualquer rotação de 1 q-bit pode ser implementado pelo modelo. Assim, só nos resta discutir como implementar a porta  $CNOT$  para que tenhamos um conjunto universal que pode ser simulado pelo modelo.

O papel da porta  $CNOT$  é "flipar" (inverter) o estado do q-bit alvo de  $|n\rangle \rightarrow |1-n\rangle$  quando o estado do q-bit controle for  $|1\rangle$ . Notando-se que a ação  $|n\rangle \rightarrow |1-n\rangle$  pode ser vista como uma rotação de um ângulo  $\pi$  em torno da direção  $|+\rangle$  na esfera de Bloch, então identificamos o conjunto  $\{|\hat{n}_{\pm}\rangle, \phi\} = \{|\pm\rangle, \pi\}$ .

Para mostrar que a escolha  $\{|\hat{n}_{\pm}\rangle, \phi\} = \{|\pm\rangle, \pi\}$  nos permite implementar uma  $CNOT$  no subsistema  $\mathcal{S}$  deixe-nos escrever o estado inicial do sistema, dado pela Eq. (118), na base



$\{|+\rangle, |-\rangle\}$  como

$$|\psi_2\rangle = \alpha_1 |0+\rangle + \alpha_2 |0-\rangle + \alpha_3 |1+\rangle + \alpha_4 |1-\rangle , \quad (124)$$

onde definimos  $\alpha_1 = (a_1 + a_2) / \sqrt{2}$ ,  $\alpha_2 = (a_1 - a_2) / \sqrt{2}$ ,  $\alpha_3 = (a_3 + a_4) / \sqrt{2}$  e  $\alpha_4 = (a_3 - a_4) / \sqrt{2}$ . Realizando a computação deixando o sistema evoluir adiabaticamente segundo o Hamiltoniano da Eq. (121) nós obtemos, no limite  $\theta_0 \rightarrow \pi$ , um estado  $|\psi_2^{\text{rod}}\rangle$  dado por

$$|\psi_2^{\text{rod}}\rangle = \alpha_1 |0+\rangle + \alpha_2 |0-\rangle + \alpha_3 |1+\rangle - \alpha_4 |1-\rangle , \quad (125)$$

que na base computacional pode ser escrito como

$$|\psi_2^{\text{rod}}\rangle = a_1 |00\rangle + a_2 |01\rangle + a_3 |11\rangle + a_4 |10\rangle . \quad (126)$$

O que mostra que  $|\psi_2^{\text{rod}}\rangle = CNOT|\psi_2\rangle$ . Assim, temos ilustrado que a escolha do conjunto  $\{|+\rangle, |-\rangle, \pi\}$  é conveniente para implementarmos a porta *CNOT* via EAC. Esse mesmo conjunto é usado para implementar a porta *NOT* de 1 q-bit. Outro exemplo de porta que pode ser implementada adiabaticamente por este modelo, também mencionado em [42], é a porta Hadamard. Para implementar a porta Hadamard a escolha do conjunto  $\{|\hat{n}_\pm\rangle, \phi\}$  é diferente da escolha feita para a porta *CNOT*. Dessa vez o conjunto deve ser  $\{|\hat{n}_\pm\rangle, \phi\} = \{|\pm_y\rangle, \pi/2\}$ , onde  $|\pm_y\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle) / \sqrt{2}$ .

### 4.3 Portas controladas por $n$ -q-bits via EAC

Nesta seção nós mostramos uma generalização do modelo apresentado anteriormente. Vimos que usando EAC nós podemos realizar CQ universal usando classes de conjuntos universais de portas compostos por portas de 1 q-bit e portas controladas. Mostraremos agora como estender esse modelo de modo que outras classes de portas universais possam ser usadas para a computação. A ideia é mostrar que, usando EAC, podemos implementar portas controladas por  $n$  q-bits. Para isso, deixe-nos definir os novos subsistema  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$ .

Análogo aos casos anteriores, o nosso subsistema  $\mathcal{A}$  será composto pelo único q-bit auxiliar que é inicializado no estado  $|0\rangle$  e, ao final do processo, a medida também é feita sobre o subsistema  $\mathcal{A}$ . Por outro lado, o subsistema  $\mathcal{S}$  é formado pelos  $(n + 1)$  q-bits sobre os quais realizaremos a computação. Desses  $(n + 1)$  q-bits nós definiremos os  $n$  primeiros q-bits como sendo os q-bits controle, e o  $(n + 1)$ -ésimo será o q-bit alvo. Nosso modelo não se restringe a essa única configuração, permitindo assim qualquer permutação dos q-bits controle e alvo. Assumiremos, também, que a porta controlada apenas atuará quando o estado dos q-bits controle for  $|1 \cdots 1\rangle$ , nos demais casos nada é feito sobre o estado do q-bit alvo. Assim como a escolha dos q-bits controle e alvo, a escolha da condição sobre os q-bits controle para que a porta atue também é arbitrária, permitindo implementar qualquer porta controlada que atue quando o estado dos q-bits controle for  $|j_1 \cdots j_n\rangle$ , para algum conjunto de valores  $\{j_n\}$ , por exemplo.

Iniciamos nosso processo considerando o estado mais geral possível de  $(n + 1)$  q-bits dado

por

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_{n+1}} a_{m_1 \cdots m_{n+1}} |m_1 \cdots m_n\rangle |m_{n+1}\rangle , \quad (127)$$

onde denotamos  $|m_1 \cdots m_n\rangle$  como sendo o estado dos  $n$  primeiros q-bits,  $|m_{n+1}\rangle$  como o estado do  $(n+1)$ -ésimo q-bit e cada  $m_k = \{0, 1\}$ . Por questão de notação, é conveniente escrever o estado dos  $n$  primeiros q-bits na forma decimal usando que um número inteiro  $N = 2^n - 1$  pode ser expresso, na forma binária, como  $N_{\text{bin}} = a_n \cdots a_0$  onde os coeficientes  $a_n$ 's satisfazem  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^{n-1-k}$ . Assim, podemos fazer a mudança

$$\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_{n+1}} a_{m_1 \cdots m_{n+1}} |m_1 \cdots m_n\rangle |m_{n+1}\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m_{n+1}} a_{km_{n+1}} |k\rangle |m_{n+1}\rangle , \quad (128)$$

portanto o estado inicial do sistema  $\mathcal{SA}$  é dado por

$$|\Psi_n(0)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m_{n+1}} a_{km_{n+1}} |k\rangle |m_{n+1}\rangle |0\rangle , \quad (129)$$

onde o estado  $|0\rangle$  é o estado inicial do subsistema  $\mathcal{A}$ . Novamente, antes de iniciarmos nossa análise da evolução do sistema, faz-se conveniente escrever o estado do q-bit alvo na base  $\{|\hat{n}_{\pm}\rangle\}$  de modo que obtemos

$$|\Psi_n(0)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\mu} \alpha_{k\mu} |k\rangle |\hat{n}_{\mu}\rangle |0\rangle , \quad (130)$$

com  $\mu = \{\pm\}$ . Assim, nós deixamos o sistema evoluir segundo o Hamiltoniano

$$H(s) = [\mathbb{1} - P_{N-1, \hat{n}_-}] \otimes H_0(s) + P_{N-1, \hat{n}_-} \otimes H_{\phi}(s) , \quad (131)$$

onde  $P_{k, \hat{n}_{\pm}} = |k\hat{n}_{\pm}\rangle \langle k\hat{n}_{\pm}|$ , com  $k = \{1, \dots, N-1\}$ , é um projetor sobre o subsistema  $\mathcal{S}$  e onde  $\mathbb{1} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\mu} P_{k, \hat{n}_{\mu}}$ . A forma do Hamiltoniano na Eq. (131) é devido a escolha feita no início dessa seção acerca do subsistema composto pelos q-bits controle e alvo e a forma como a porta controlada deve atuar.

Se desejamos mudar a configuração, onde trocamos o estado dos q-bits controle que ativa a porta controlada, então a forma como arranjamos os projetores  $P_{k, \hat{n}_{\mu}}$  deve mudar. Por exemplo, se uma dada porta controlada atua quando o estado dos q-bits de controle for  $|l\rangle$ , então devemos fazer a troca  $P_{N-1, \hat{n}_-} \rightarrow P_{l, \hat{n}_-}$  no Hamiltoniano da Eq. (131). Portanto, adotar o Hamiltoniano como na Eq. (131) para o desenvolvimento dos resultados não causa nenhuma perda de generalidade do nosso modelo.

Permitindo que o sistema evolua segundo o Hamiltoniano presente na Eq. (131), o estado final do sistema será, pela Eq. (111), dado por

$$|\Psi_n(1)\rangle = [(\mathbb{1} - P_{N-1, \hat{n}_-}) |\psi_n\rangle] \otimes |E_0^0(1)\rangle + P_{N-1, \hat{n}_-} |\psi_n\rangle \otimes |E_{\phi}^0(1)\rangle ,$$

desenvolvendo a equação acima nós ainda podemos escrever

$$|\Psi_n(1)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|\psi_n\rangle|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|\psi_n^{\text{rod}}\rangle|1\rangle, \quad (132)$$

onde  $|\psi_n\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\hat{n}_\mu} \alpha_{k\mu} |k\rangle |\hat{n}_\mu\rangle$  é exatamente o estado de entrada e  $|\psi_n^{\text{rod}}\rangle$  é dado por

$$|\psi_n^{\text{rod}}\rangle = \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{\mu} \alpha_{k\mu} |k\rangle |\hat{n}_\mu\rangle + \alpha_{N-1\hat{n}_+} |N-1\rangle |\hat{n}_+\rangle + e^{i\phi} \alpha_{N-1\hat{n}_-} |N-1\rangle |\hat{n}_-\rangle, \quad (133)$$

onde os dois ultimos termos podem ser escritos como  $|N-1\rangle (\alpha_{N-1\hat{n}_+} |\hat{n}_+\rangle + e^{i\phi} \alpha_{N-1\hat{n}_-} |\hat{n}_-\rangle)$  que representa justamente a atuação da porta controlada sobre o q-bit alvo, já que o estado  $|N-1\rangle$  na representação binária corresponde exatamente ao estado  $|1 \dots 1\rangle$ . O sucesso da computação novamente depende especialmente do parâmetro  $\theta_0$ , onde o limite  $\theta_0 \rightarrow \pi$  é mais uma vez o limite de máxima probabilidade de sucesso.

Como mencionamos, nosso modelo pode ser usado para outras formas de realizar computação usando outros conjuntos de portas universais. Para exemplificar a utilidade desse modelo. Primeiro, devemos lembrar que a porta Toffoli juntamente com Hadamard são universais para computação quântica [65]. Com esse intuito, a porta Toffoli pode ser implementada pelo nosso modelo usando a mesma escolha do conjunto  $\{|\hat{n}_+\rangle, |\hat{n}_-\rangle, \phi\}$  que foi adotado para implementar a porta *NOT* e *CNOT*. Em adição, para simular CQ universal nós ainda precisamos implementar a porta Hadamard, que pode ser feito escolhendo o conjunto  $\{|\hat{n}_\pm\rangle, \phi\} = \{|\pm_y\rangle, \pi/2\}$ , onde  $|\pm_y\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle) / \sqrt{2}$ .

#### 4.4 Computação Adiabática Probabilística

Visto que o parâmetro  $\theta_0$  é responsável pelo grau de fidelidade da computação, surge a pergunta: *Em média, abrir mão da máxima fidelidade de computação seria energeticamente mais vantajoso?* Aqui tentaremos responder a essa pergunta analisando a realização de *CQ Adiabática probabilística* por evoluções controladas.

Para tal, deixe-nos definir o custo energético em uma evolução de um sistema quântico como a medida de energia dada por [66, 67]

$$\Sigma(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|H(t)\| dt. \quad (134)$$

Para determinar a quantidade  $\|H(t)\|$  nós usamos a norma de Hilbert-Schmidt  $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}[A^\dagger A]}$ . Calculando o custo energético para o Hamiltoniano que implementa rotações controladas por  $n$  q-bits dado na Eq. (131) nós obtemos que  $\Sigma_{\text{Ad}}(n) = \sqrt{2^{3(n-1)}} n \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}}$ , onde  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}} = 2\hbar\omega$  é o custo energético para implementar portas de 1 q-bit.

A computação probabilística é consequência de escolhermos diferentes valores para o parâmetro  $\theta_0$ . Da Eq. (117) percebe-se que a probabilidade de sucesso da computação é  $\sin^2(\theta_0/2)$ ,

logo em média precisamos de  $\langle N \rangle = 1/\sin^2(\theta_0/2)$  de repetições do protocolo para que tenhamos sucesso na computação. Sem perda de generalidade, uma vez que o custo energético para implementar portas de  $n$  q-bits é proporcional ao custo para implementar portas de 1 q-bit, deixe nos definir a média do custo energético requerido para realizar a computação probabilística como

$$\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0) = \langle N \rangle \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}} = \cos \sec^2(\theta_0/2) \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}} . \quad (135)$$

Note que no limite  $\theta_0 \rightarrow \pi$  nós temos exatamente  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0) = \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}}$ , mas no limite  $\theta_0 \rightarrow 0$  temos  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0) \rightarrow \infty$ . Esse último resultado é explicado pelo fato de que quando temos  $\theta_0 \rightarrow 0$  a probabilidade de sucesso vai a zero. Mas o que queremos é saber para quais valores de  $\theta_0$  nós temos o valor ótimo de  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0)$ . Será que podemos obter um  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0) < \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}}$  para algum  $\theta_0$ ? Fazendo o estudo da criticidade da função  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0)$  nós obtemos que

$$\frac{d\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0)}{d\theta_0} = \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}} \frac{d \cos \sec^2(\theta_0/2)}{d\theta_0} = -\frac{1}{2} \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}} \cos \sec^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin(\theta_0) . \quad (136)$$

Assim, os pontos críticos de  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0)$  ocorrem quando

$$\frac{d\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0)}{d\theta_0} = 0 ,$$

ou equivalentemente  $\sin(\theta_0) = 0$ , já que  $\cos \sec^2(\theta_0/2) \neq 0$  no intervalo  $0 < \theta_0 \leq \pi$ . Assim, o único ponto crítico da função  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0)$  é exatamente  $\theta_0 = \pi$ , mostrando que não existe nenhum valor de  $\theta_0$  tal que  $\Sigma_{\text{Ad}}^{\text{prob}}(\theta_0) < \Sigma_{\text{Ad}}^{\text{sing}}$ . A introdução do conceito de computação adiabática probabilística por EAC não nos dá nenhuma vantagem em termos de custo energético com relação a computação determinística (onde consideramos  $\theta_0 = \pi$ ), porém o conceito de computação probabilística se fará vantajoso mais a frente quando analisarmos a computação superadiabática probabilística.

## Parte II

# Computação Quântica Superadiabática

Agora nesta parte nós passaremos a discutir detalhadamente o que vem a ser o coração da nossa pesquisa e, conseqüentemente, desta dissertação. Todos os resultados aqui apresentados foram discutidos e publicados de acordo com as referências [43, 44].

Inicialmente nós faremos, no capítulo 5, um breve resumo acerca dos principais resultados sobre atalhos para adiabaticidade. Na seção 5.1 nós derivaremos, de forma genérica, os chamados Hamiltonianos contra-diabáticos que são os elementos fundamentais quando desejamos remover o vínculo temporal de uma evolução adiabática. Já na seção 5.2 nós nos dedicamos a responder uma pergunta cuja resposta seguia sem uma demonstração formal desde o desenvolvimento de atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos. Tal questão diz respeito ao tempo total de evolução em evoluções superadiabáticas: *Como poderemos estimar o tempo de evolução superadiabática, uma vez que tal evolução não carrega nenhum vínculo temporal?* Para isso nós mostramos que essa questão é satisfatoriamente respondida fazendo uso de limites para o tempo de evolução em sistemas quânticos e a análise do custo energético, ambos para sistemas fechados, caracterizando um estudo da complementaridade energia-tempo em evoluções superadiabáticas.

No capítulo 6 nós derivamos o atalho para o TQ adiabático e mostramos em seguida, com ajuda de dois teoremas, que o TQ superadiabático é um primitivo para CQ universal superadiabática. Para tanto, mostramos que é possível, com o TQ superadiabático, implementar qualquer conjunto universal de portas quânticas. Em seguida nós mostramos que o método pode ser estendido para implementar o TQ superadiabático de portas de  $n$  q-bits. Encerramos a seção com a análise do custo energético para implementar portas de  $n$  q-bits que, onde nossa análise é discutida numericamente para algumas interpolações específicas.

No capítulo 7 nós propomos o uso de atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos para realizar CQ universal. Para tal, derivamos um atalho para EAC de forma genérica na seção 7.1 e nas seções seguintes aplicamos os resultados para mostrar como evoluções superadiabáticas controladas (ESC) podem ser usadas para realizar CQ universal, e assim obtendo um modelo híbrido de CQ universal superadiabática. Um dos resultados mais significantes da referida seção, é que mostramos que, independente da porta que desejamos implementar pelo modelo, isso sempre pode ser feito com a adição de um Hamiltoniano contra-diabático independente do tempo. O estudo da complementaridade energia-tempo para o modelo proposto será de grande utilidade para podermos analisar a performance de tal modelo. Na seção 7.4 nós finalizamos com um estudo da QC probabilística, onde a computação ocorre apenas com certa probabilidade  $p < 1$ , baseada em ESC. Como resultado mostramos que, em média, existem situações onde energeticamente é mais vantajoso realizarmos QC probabilística e não a CQ determinística, onde a computação ocorre com fidelidade 1.

## 5 Atalho para Adiabaticidade

Na *Parte I* desta dissertação vimos que evoluções adiabáticas nos permite simular circuitos quânticos, desde que um Hamiltoniano adiabático seja construído para tal finalidade. Além disso, podemos mostrar que qualquer porta quântica pode ser implementada adiabaticamente, seja via TQ ou evoluções controladas. Porém, independente do modelo usado para realizar tal tarefa, existe um vínculo que deve ser respeitado na implementação individual de cada porta de um circuito. Como sabemos, o tempo necessário para implementar uma porta é estabelecido pelas condições de validade do teorema adiabático. Assim poderíamos nos perguntar: *Existiria alguma maneira de imitar uma evolução adiabática, mas de forma que o vínculo temporal possa ser removido?*

A resposta a essa pergunta é positiva e o método de como fazer isso foi proposto por Demirplak e Rice [37, 38], posteriormente também estudado por Berry [39]. Neste capítulo nós introduziremos o método proposto por Demirplak e Rice que faz uso dos chamados *Hamiltonianos contra-diabáticos*.

### 5.1 O Hamiltoniano contra-diabático

Como ponto de partida, considere a equação de Schrödinger

$$H(t) |\psi_0(t)\rangle = i\hbar |\dot{\psi}_0(t)\rangle ,$$

para um Hamiltoniano dependente do tempo  $H(t)$ . O elemento básico usado para derivar um atalho para adiabaticidade é um operador  $U(t)$  que é usado para rodar a equação acima de forma a obter uma boa aproximação adiabática. Uma definição conveniente para o operador  $U(t)$  é

$$U(t) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \varepsilon_n(t') dt' + \int_0^t \langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle dt'} |E_n(t)\rangle \langle E_n(0)| , \quad (137)$$

onde  $|E_n(t)\rangle$  é o  $n$ -ésimo autoestado do Hamiltoniano com autoenergia  $\varepsilon_n(t)$ . Essa definição é boa, pois dessa forma o operador  $U(t)$  pode ser identificado como sendo um operador evolução que nos fornece uma evolução adiabática. De fato, seja o estado inicial do sistema  $|\psi_0(0)\rangle = |E_k(0)\rangle$ , onde  $|E_k(0)\rangle$  é autoestado de  $H_0(0)$ , então

$$U(t) |\psi_0(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \varepsilon_k(t') dt' + \int_0^t \langle \dot{E}_k(t) | E_k(t) \rangle dt'} |E_k(t)\rangle , \quad (138)$$

que nada mais é do que a solução adiabática.

A maneira de determinar como realizar o atalho via Hamiltonianos contra-diabáticos é supor que existe um termo  $H_{CD}$  que, quando adicionado ao Hamiltoniano  $H(t)$ , nos forneça uma

solução  $|\psi_0(t)\rangle = U(t)|\psi_0(0)\rangle$ . Então, deixe-nos definir o novo Hamiltoniano

$$H_{SA}(t) = H(t) + H_{CD}(t) , \quad (139)$$

chamado *Hamiltoniano superadiabático*, onde o termo somado ao Hamiltoniano original é chamado de *Hamiltoniano contra-diabático* ou *termo contra-diabático*. Assim, deixamos o sistema evoluir segundo a equação

$$H_{SA}(t)|\psi_0(t)\rangle = i\hbar|\dot{\psi}_0(t)\rangle . \quad (140)$$

Rodando a equação acima pelo operador unitário  $U(t)$ , obtemos

$$U^\dagger(t) H_{SA}(t) U(t) U^\dagger(t)|\psi_0(t)\rangle = i\hbar U^\dagger(t)|\dot{\psi}_0(t)\rangle ,$$

onde usamos que  $U(t) U^\dagger(t) = 1$ . Agora note que usando  $U^\dagger(t)|\dot{\psi}_0(t)\rangle = |\dot{\psi}_1(t)\rangle - \dot{U}^\dagger(t)|\psi_0(t)\rangle$ , onde  $|\psi_1(t)\rangle = U^\dagger(t)|\psi_0(t)\rangle$ , na equação acima ficamos com

$$U^\dagger(t) H_{SA}(t) U(t) U^\dagger(t)|\psi_0(t)\rangle = i\hbar[|\dot{\psi}_1(t)\rangle - \dot{U}^\dagger(t)|\psi_0(t)\rangle] .$$

A fim de obter uma equação para  $|\dot{\psi}_1(t)\rangle$ , usamos novamente a unitariedade  $U(t)$  e escrevemos

$$\left[ U^\dagger(t) H_{SA}(t) U(t) + i\hbar \dot{U}^\dagger(t) U(t) \right] |\psi_1(t)\rangle = i\hbar |\dot{\psi}_1(t)\rangle . \quad (141)$$

O objetivo é mostrar que existe um  $H_{CD}(t)$  de modo que a solução para  $|\psi_0(t)\rangle$  seja exatamente a solução adiabática. Para isso, notamos que  $U(0) = \mathbb{1}$ , consequentemente  $|\psi_1(0)\rangle = |\psi_0(0)\rangle$ , de modo que a definição  $|\psi_1(t)\rangle = U^\dagger(t)|\psi_0(t)\rangle$  sugere que se  $|\dot{\psi}_1(t)\rangle = 0$ , então  $|\psi_1(t)\rangle = |\psi_1(0)\rangle = |\psi_0(0)\rangle$ . Portanto temos que

$$|\psi_0(t)\rangle = U(t)|\psi_1(t)\rangle = U(t)|\psi_0(0)\rangle , \quad (142)$$

e considerando que o sistema inicialmente é preparado em um autoestado específico do Hamiltoniano  $H(t)$ , então temos Eq. (138) como solução.

Assim, se fizermos tal imposição sobre  $|\psi_1(t)\rangle$ , a Eq. (141) nos fornece

$$H_{SA}(t) = -i\hbar U(t) \dot{U}^\dagger(t) . \quad (143)$$

Derivando  $U^\dagger(t)$  encontramos

$$\begin{aligned} \dot{U}^\dagger(t) &= \sum_n \left( \frac{i}{\hbar} \varepsilon_n(t) + \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \varepsilon_n(t') dt' + \int_0^t \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle dt'} |E_n(0)\rangle \langle E_n(t)| \\ &+ \sum_n e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \varepsilon_n(t') dt' + \int_0^t \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle dt'} |E_n(0)\rangle \langle \dot{E}_n(t)| , \end{aligned}$$

portanto temos

$$U(t) \dot{U}^\dagger(t) = \sum_n |E_n(t)\rangle \langle \dot{E}_n(t)| + \sum_n \left( \frac{i}{\hbar} \varepsilon_n(t) + \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle \right) |E_n(t)\rangle \langle E_n(t)| . \quad (144)$$

Substituído o resultado acima na Eq. (143) obtemos que

$$H_{SA}(t) = H(t) + i\hbar \sum_n \left( |\dot{E}_n(t)\rangle \langle E_n(t)| + \langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle |E_n(t)\rangle \langle E_n(t)| \right) , \quad (145)$$

onde usamos que  $\sum_n \varepsilon_n(t) |E_n(t)\rangle \langle E_n(t)| = H(t)$ , que  $\langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle = -\langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle$  e que

$$\sum_n |\dot{E}_n(t)\rangle \langle E_n(t)| = - \sum_n |E_n(t)\rangle \langle \dot{E}_n(t)| , \quad (146)$$

devido a  $\sum_n |E_n(t)\rangle \langle E_n(t)| = \mathbb{1}$ . Portanto, comparando a Eq. (145) com a Eq. (139) concluímos que

$$H_{CD}(t) = i\hbar \sum_n \left( |\dot{E}_n(t)\rangle \langle E_n(t)| + \langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle |E_n(t)\rangle \langle E_n(t)| \right) \quad (147)$$

deve ser o Hamiltoniano contra-diabático que será adicionado ao Hamiltoniano  $H_0(t)$  que nos permite imitar uma evolução adiabática. Em momento algum precisamos submeter o tempo de evolução do sistema, de modo que nessa teoria *não há* vínculo sobre o mesmo.

## 5.2 Complementaridade Energia-Tempo em Evoluções Superadiabáticas

Ao removermos o vínculo temporal em evoluções adiabáticas usando atalhos para adiabaticidade, deixamos que agora o sistema evolua sem qualquer restrição sobre o tempo total de evolução. Além disso, acredita-se que usando atalhos para adiabaticidade nós podemos imitar a evolução adiabática em intervalos de tempo arbitrariamente pequenos.

Mas como podemos garantir isso? Existiria um limite inferior para o quão rápido a evolução superadiabática pode ocorrer? Se sim, quem é responsável por moderar o tempo de evolução do sistema?

Diante dessas questões somos motivados a analisar a complementaridade energia-tempo em evoluções superadiabáticas. Esse estudo é feito aqui mediante a análise de limites para o tempo de evolução em sistemas quânticos em conjunto com uma definição de custo energético.

### 5.2.1 O tempo total de evolução

Limites de velocidade quântica (QSL do inglês *quantum speed limit*) em evoluções de sistemas quânticos surgiram da investigação do tempo mínimo requerido para um sistema quântico, governado por um Hamiltoniano  $H$ , evoluir de um estado  $|\psi\rangle$  até um estado  $|\psi^\perp\rangle$  ortogonal ao estado  $|\psi\rangle$  ( $\langle\psi|\psi^\perp\rangle = 0$ ) [68]. Outros resultados mais gerais para sistemas governados por Hamiltonianos independentes do tempo também foram propostos [69, 70].



Aqui nós adotaremos o *bound* mais geral possível para sistemas quânticos fechados, pois em geral lidamos com Hamiltonianos dependentes do tempo  $H(t_1)$  onde  $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$  para  $t_1 \neq t_2$ . A fim de determinar o QSL para Hamiltonianos desse tipo nós devemos usar a expressão do QSL para sistemas fechados, que foi derivada por Deffner e Lutz [71], dada pela desigualdade (ver Apêndice C)

$$\tau \geq \frac{|\cos[\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)] - 1|}{E_\tau}, \quad (148)$$

onde tem-se definido a quantidade  $E_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle|$ , que não pode ser vista como uma média da energia do sistema em geral. De fato, a energia média do sistema leva em conta uma média sobre a quantidade  $\langle E(t) \rangle = |\langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle|$ , mas o que temos é uma média sobre a quantidade  $|\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle|$ . Este não pode, em geral, ser visto como a energia do sistema. A quantidade  $\cos[\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]$  acima é a métrica de Bures que para estados puros é dado por  $\mathcal{L}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \arccos[|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|]$  [9].

Para encontrar um limite para o tempo total de evolução nós devemos identificar o estado evoluído presente na definição de  $E_\tau$  como  $|\psi(t)\rangle = e^{-\vartheta_k(t)} |E_k(t)\rangle$ , para alguma fase  $\vartheta_k(t)$ , e o estado inicial como sendo  $|\psi(0)\rangle = |E_k(0)\rangle$ . Como o Hamiltoniano que realiza uma evolução superadiabática é dado pela Eq. (145), nós temos que

$$\begin{aligned} E_\tau &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt |\langle E_k(0) | H_{SA}(t) | E_k(t) \rangle| \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt |\langle E_k(0) | H(t) + H_{CD}(t) | E_k(t) \rangle| \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt |\varepsilon_k(t) \langle E_k(0) | E_k(t) \rangle + \langle E_k(0) | H_{CD}(t) | E_k(t) \rangle|, \end{aligned} \quad (149)$$

onde  $\varepsilon_k(t)$  é a energia associada ao autoestado  $|E_k(t)\rangle$  do Hamiltoniano adiabático. Usando a desigualdade  $\int_0^\tau dt |f(t) + g(t)| \leq \int_0^\tau dt |f(t)| + \int_0^\tau dt |g(t)|$  nós obtemos

$$\begin{aligned} E_\tau &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt |E_0(t) \langle E_0(0) | E_0(t) \rangle| + \frac{\hbar}{\tau} \int_0^\tau dt |\langle E_0(0) | \partial_t E_0(t) \rangle| \\ &\quad + \frac{\hbar}{\tau} \int_0^\tau dt |\langle E_0(t) | \partial_t E_0(t) \rangle \langle E_0(0) | E_0(t) \rangle|. \end{aligned} \quad (150)$$

Agora, por simplicidade, fazemos a seguinte mudança de variável  $s = t/\tau$  nas integrais para escrever

$$E_\tau \leq \eta_1 + \frac{\eta_2 + \eta_3}{\tau}, \quad (151)$$

com as seguintes definições  $\eta_1 = \int_0^1 ds |E_0(s) \langle E_0(0) | E_0(s) \rangle|$ ,  $\eta_2 = \hbar \int_0^1 ds |\langle E_0(0) | \partial_s E_0(s) \rangle|$  e  $\eta_3 = \hbar \int_0^1 ds |\langle E_0(s) | \partial_s E_0(s) \rangle \langle E_0(0) | E_0(s) \rangle|$ . Nós sabemos ainda que podemos escrever  $E_0(s) = \hbar \omega g_0(s)$ , para alguma função adimensional  $g_0(s)$ , assim nós definimos as quantidades  $\chi \equiv \eta_2 + \eta_3$  e  $\eta_1 = \omega \eta$ , com  $\eta = \hbar \int_0^1 ds |g(s) \langle E_0(0) | E_0(s) \rangle|$ . Usando a Eq. (148) e a

quantidade  $E_\tau$  determinada pela Eq. (151) para escrever

$$\eta \omega \tau + \chi \geq \hbar |\cos \mathcal{L}(E_0(0), E_0(1)) - 1|, \quad (152)$$

Então, para determinar um limite para o tempo  $\tau$  nós precisamos analisar a equação acima. Deixe-nos iniciar analisando com cuidado a quantidade  $\chi$ . Primeiro note que, por definição, nós temos  $\chi \geq \eta_2$ , portanto

$$\begin{aligned} \chi \geq \eta_2 \geq \hbar \int_0^1 ds |d_s \langle E_0(0) | E_0(s) \rangle| &\geq \hbar \left| \int_0^1 ds (d_s \langle E_0(0) | E_0(s) \rangle) \right| \\ &= \hbar |\cos \mathcal{L}(E_0(0), E_0(1)) - 1|, \end{aligned} \quad (153)$$

onde na primeira e segunda desigualdade usamos  $|(d_t \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle)| \leq |d_t [\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle]|$  e  $\int_0^\tau dt |f(t)| \geq |\int_0^\tau dt f(t)|$ , respectivamente. Da definição da métrica de Bures nós ficamos com  $\chi \geq \hbar |\cos \mathcal{L}(E_0(0), E_0(1)) - 1|$ . Esse resultado propõe que qualquer quantidade  $\omega \tau > 0$  é admissível e não viola a desigualdade na Eq. (152), sendo compatível inclusive com o limite  $\omega \tau \rightarrow 0$ .

Nossa análise sugere, portanto, que evoluções contra-diabáticas podem ser realizadas em intervalos de tempo arbitrariamente curtos e que independem dos estados inicial e final da evolução. Em evoluções adiabáticas tal limite não é verificado para *gap's* finitos, uma vez que em tais evoluções o tempo de evolução é da ordem de  $\tau_{\text{Ad}} \propto 1/\omega^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}^+$  [14, 29, 55, 72]. Em conclusão, se desejamos acelerar evoluções adiabáticas usando atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos o tempo de evolução é, segundo propõe a análise do QSL, arbitrariamente pequeno. No entanto, é de se esperar que esse ganho sobre o tempo de evolução não venha a custo zero, alguma outra quantidade física deve estar sendo responsável por moderar esse tempo de evolução.

### 5.2.2 Custo energético

Quem é o responsável por moderar o tempo de evolução superadiabática? Essa é a pergunta que está intrínseca aos resultados apresentados na seção anterior e que desejamos responder agora.

Deixe-nos analisar o *custo médio da energia* durante a evolução do sistema definindo a quantidade  $\Sigma(\tau)$  dada por

$$\Sigma_{\text{SA}}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|H_{\text{SA}}(t)\| dt, \quad (154)$$

para evoluções superadiabáticas. Para calcular a quantidade  $\|H_{\text{SA}}(t)\|$  nós adotamos novamente a norma de Hilbert-Schmidt. Então, ficamos com

$$\Sigma_{\text{SA}}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sqrt{\text{Tr}[H_{\text{SA}}^2(t)]} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sqrt{\text{Tr}[(H(t) + H_{\text{CD}}(t))^2]} dt. \quad (155)$$

Agora deixe-nos determinar o traço calculando-o na base de autoestados do Hamiltoniano

$H(t)$ . Primeiramente, escrevemos

$$\text{Tr}\{[H(t) + H_{\text{CD}}(t)]^2\} = \text{Tr}[H^2(t) + H_{\text{CD}}^2(t)] + \text{Tr}[\{H(t), H_{\text{CD}}(t)\}] , \quad (156)$$

onde  $\{A, B\} = AB + BA$  denota o anti-comutador entre os operadores  $A$  e  $B$ . Devido a propriedade cíclica do traço, podemos escrever  $\text{Tr}[\{H(t), H_{\text{CD}}(t)\}] = 2\text{Tr}[H(t) H_{\text{CD}}(t)]$ . Assim

$$\begin{aligned} \text{Tr}[H(t) H_{\text{CD}}(t)] &= \sum_n \langle E_n(t) | H(t) H_{\text{CD}}(t) | E_n(t) \rangle \\ &= \sum_n \varepsilon_n(t) \langle E_n(t) | H_{\text{CD}}(t) | E_n(t) \rangle , \end{aligned} \quad (157)$$

onde usamos  $\langle E_n(t) | H(t) = \langle E_n(t) | \varepsilon_n(t)$ . Agora escrevendo  $H_{\text{CD}}(t)$  a partir da Eq. (147), temos

$$\begin{aligned} \langle E_n(t) | H_{\text{CD}}(t) | E_n(t) \rangle &= i\hbar \sum_n \langle \dot{E}_k(t) | E_k(t) \rangle \langle E_n(t) | E_k(t) \rangle \langle E_k(t) | E_n(t) \rangle \\ &\quad + i\hbar \sum_n \langle E_n(t) | \dot{E}_k(t) \rangle \langle E_k(t) | E_n(t) \rangle \\ &= i\hbar [\langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle + \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle] \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} [\langle E_n(t) | E_n(t) \rangle] . \end{aligned}$$

Usando que  $\langle E_n(t) | E_n(t) \rangle = 1$  para todo  $t$ , então concluímos que

$$\langle E_n(t) | H_{\text{CD}}(t) | E_n(t) \rangle = 0 \quad \forall n , \quad (158)$$

o que mostra que na base de autoestados de  $H(t)$  o termo contra-diabático  $H_{\text{CD}}(t)$  tem todos os elementos da diagonal nulos. Usando o resultado da equação acima na Eq. (157), encontramos que  $\text{Tr}[H(t) H_{\text{CD}}(t)] = 0$ , consequentemente  $\text{Tr}[\{H(t), H_{\text{CD}}(t)\}] = 0$ . Portanto a Eq. (156) se reduz à

$$\text{Tr}\{[H(t) + H_{\text{CD}}(t)]^2\} = \sum_n E_n^2(t) + \text{Tr}[H_{\text{CD}}^2(t)] ,$$

onde usamos que  $\text{Tr}[H^2(t)] = \sum_n E_n^2(t)$ . Para determinar  $\text{Tr}[H_{\text{CD}}^2(t)]$ , deixe-nos escrever  $H_{\text{CD}}^2(t)$  explicitamente como

$$\begin{aligned} H_{\text{CD}}^\dagger(t) H_{\text{CD}}(t) &= \hbar^2 \sum_n |\langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle|^2 |E_n(t)\rangle \langle E_n(t)| \\ &\quad + \hbar^2 \sum_{n,m} \langle \dot{E}_n(t) | \dot{E}_m(t) \rangle |E_n(t)\rangle \langle E_m(t)| \\ &\quad + \hbar^2 \sum_{n,m} \langle \dot{E}_n(t) | E_n(t) \rangle \langle \dot{E}_n(t) | E_m(t) \rangle |E_n(t)\rangle \langle E_m(t)| \\ &\quad + \hbar^2 \sum_{n,m} \langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle \langle E_n(t) | \dot{E}_m(t) \rangle |E_n(t)\rangle \langle E_m(t)| . \end{aligned}$$

Então calculando os elementos diagonais da matriz  $H_{\text{CD}}^\dagger(t) H_{\text{CD}}(t)$  na base de autoestados de  $H(t)$  nós obtemos

$$\langle E_k(t) | H_{\text{CD}}^\dagger(t) H_{\text{CD}}(t) | E_k(t) \rangle = \hbar^2 [\langle \dot{E}_k(t) | \dot{E}_k(t) \rangle - |\langle E_k(t) | \dot{E}_k(t) \rangle|^2] .$$

Portanto,  $\text{Tr}[H_{\text{CD}}^2(t)]$  fica dado por

$$\text{Tr}[H_{\text{CD}}^2(t)] = \hbar^2 \sum_n [\langle \dot{E}_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle - |\langle E_n(t) | \dot{E}_n(t) \rangle|^2] . \quad (159)$$

Em conclusão, o custo energético em evoluções superadiabáticas é calculado usando

$$\Sigma_{\text{SA}}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sqrt{\sum_m [E_m^2(t) + \hbar^2 \mu_m(t)]} dt , \quad (160)$$

onde  $\mu_m(t) = \langle \dot{m}(t) | \dot{m}(t) \rangle - |\langle m(t) | \dot{m}(t) \rangle|^2$  é a *contribuição superadiabática* e  $E_m(t)$  são os autovalores do Hamiltoniano adiabático. Por outro lado, o custo energético na evolução adiabática é

$$\Sigma_{\text{Ad}} = \int_0^1 \sqrt{\sum_m E_m^2(s)} ds , \quad (161)$$

onde nós parametrizamos a integral usando  $s = t/\tau$ . Então usando a mesma parametrização na Eq. (160) nós obtemos que

$$\Sigma_{\text{SA}}(\tau) = \int_0^1 \sqrt{\sum_m \left[ E_m^2(s) + \hbar^2 \frac{\mu_m(s)}{\tau^2} \right]} ds \quad (162)$$

é o custo para implementar a evolução superadiabática. Com isso primeiro podemos verificar que  $\Sigma_{\text{SA}}(\tau) > \Sigma_{\text{Ad}}$ , mostrando assim que *sempre* teremos um custo adicional para imitar uma evolução adiabática via Hamiltonianos contra-diabáticos. Uma segunda conclusão é que, como esperado, no limite adiabático  $\tau \rightarrow \infty$  nós recuperamos o custo energético associado à evolução adiabática, isto é  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Sigma_{\text{SA}}(\tau) \rightarrow \Sigma_{\text{Ad}}$ .

## 6 Computação Quântica Universal via TQ Superadiabático

Motivados pela proposta do TQ adiabático de portas, nós propomos o TQ superadiabático como um primitivo para CQ. Neste capítulo nos derivaremos um atalho via Hamiltonianos contra-diabáticos para o TQ adiabático, em seguida estenderemos os resultados afim de mostrar como o modelo pode ser usado para implementar portas quânticas.

### 6.1 TQ Superadiabático

O conhecimento do spectrum e autoestados do Hamiltoniano adiabático é de crucial importância para derivar um atalho via Hamiltonianos contra-diabáticos. Nesse caso precisamos conhecer o conjunto de oito autoestados do Hamiltoniano  $H(s)$  da Eq. (36). Na seção 3 nós fizemos uso das simetrias do Hamiltoniano adiabático para escrevê-lo na forma bloco diagonal e com isso facilitar a análise. Isso foi possível devido conhecermos explicitamente tal Hamiltoniano, mas teria alguma maneira de fazer a mesma análise na sua versão superadiabática? A resposta é sim, e isso é assegurado pelo seguinte teorema (veja demonstração no Apêndice D).

**Teorema 1** *Seja  $H_0(t)$  um Hamiltoniano adiabático tal que  $[H_0(t), \Pi_z] = 0$  e  $[H_0(t), \Pi_x] = 0$ . Então o Hamiltoniano superadiabático  $H_{SA}(t)$  associado a  $H_0(t)$  também satisfaz  $[H_{SA}(t), \Pi_z] = 0$  e  $[H_{SA}(t), \Pi_x] = 0$ .*

Basicamente, o teorema acima assegura que as simetrias de paridade  $\Pi_z$  e inversão de paridade  $\Pi_x$  se verificadas para o Hamiltoniano adiabático, também o são na versão superadiabática. Então, similarmente ao que foi feito na seção 3 para o TQ adiabático do estado de um q-bit, a simetria em  $\Pi_z$  permite, desde que a base seja adequadamente ordenada, escrever o Hamiltoniano superadiabático para o TQ na forma bloco diagonal como

$$H_{SA}(s) = \begin{bmatrix} H_{SA}^+(s) & \emptyset \\ \emptyset & H_{SA}^-(s) \end{bmatrix}, \quad (163)$$

onde  $H_{SA}^\pm(s)$  é o Hamiltoniano superadiabático associado ao Hamiltoniano adiabático  $H_{4 \times 4}^\pm(s)$  dos blocos do Hamiltoniano adiabático da Eq. (47). Por outro lado, a simetria em  $\Pi_x$  garante que a base pode ser ordenada de forma que  $H_{SA}^+(s) = H_{SA}^-(s)$ . Portanto o problema de determinar o Hamiltoniano superadiabático se resume ao problema de determinar o termo contra-diabático do Hamiltoniano adiabático  $4 \times 4$  dado pela Eq. (49).

Escrevendo o Hamiltoniano superadiabático  $H_{SA}^\pm(s) = H_{4 \times 4}^\pm(s) + H_{CD}^\pm(s)$ , onde  $H_{4 \times 4}^\pm(s)$  é dado pela Eq. (49), o Hamiltoniano contra-diabático  $H_{CD}^\pm(s)$  é escrito como

$$H_{CD}^\pm(s) = \frac{i\hbar}{\tau} \sum_{n=0}^3 |d_s E_n^\pm(s)\rangle \langle E_n^\pm(s)|, \quad (164)$$

onde  $|E_n^\pm(s)\rangle$  são os autoestados (normalizados) de  $H_{4 \times 4}^\pm(s)$  e dados por (não normalizados)

$$|E_0^\pm(s)\rangle = \left( \frac{\eta_i + \chi}{\eta_f}, \frac{[\chi - \eta_f][\chi + \eta_i]}{\eta_i \eta_f}, \frac{\chi - \eta_f}{\eta_i}, 1 \right), \quad (165)$$

$$|E_1^\pm(s)\rangle = \left( \frac{\eta_i}{\eta_f} - 1, -\frac{\eta_i}{\eta_f}, 0, 1 \right), \quad (166)$$

$$|E_2^\pm(s)\rangle = \left( -\frac{\eta_i}{\eta_f}, \frac{\eta_i}{\eta_f} + 1, 1, 0 \right), \quad (167)$$

$$|E_3^\pm(s)\rangle = \left( \frac{\eta_i - \chi}{\eta_f}, \frac{\eta_f - \eta_i + \chi}{\eta_i - \eta_f + \chi}, -\frac{\eta_f + \chi}{\eta_i}, 1 \right), \quad (168)$$

onde  $\eta = \eta(s)$  e  $\chi = \chi(s) = [\eta_i^2(s) + \eta_f^2(s)]^{1/2}$ . Na Eq. (164) já usamos que  $\langle d_s E_n^\pm(s) | d_s E_n^\pm(s) \rangle = 0$ , pois como as funções de interpolação  $\eta_i(s)$  e  $\eta_f(s)$  são funções reais, então  $|E_0^\pm(s)\rangle$  também são. A realização do TQ superadiabático é portanto possível usando o Hamiltoniano superadiabático da Eq. (163). Assumindo novamente o esquema apresentado na Fig. 6, o estado inicial do sistema é preparado em  $|\psi\rangle_1 |\beta_{00}\rangle_{23}$  e evolui até o estado final  $|\beta_{00}\rangle_{12} |\psi\rangle_3$ , passando sempre por autoestados instantâneos fundamentais do Hamiltoniano adiabático  $H_{SA}(s)$  dado na Eq. (36).

Para mostrarmos que o TQ superadiabático pode ser usado como um primitivo para computação quântica, devemos ser capazes primeiramente de estender os resultados anteriores para um sistema ainda maior. Dado que é sempre possível realizar o TQ adiabático de um estado de  $n$  q-bits, desde que os recursos exigidos sejam disponibilizados, agora pretendemos mostrar que também é possível teleportar superadiabaticamente um estado qualquer de  $n$  q-bits. A extensão para o TQ do estado de  $n$  q-bits é imediato combinando o Hamiltoniano da Eq. (83) com a seguinte proposição (ver demonstração no Apêndice E).

**Proposição 3** *Dado um sistema  $k$ -partido onde o Hamiltoniano que evolui o sistema é da forma*

$$H(t) = \sum_{n=1}^k \mathcal{H}_n(t) \quad , \quad (169)$$

onde  $\mathcal{H}_n(t) = (\otimes_{i=1}^{n-1} 1_i) \otimes H_n(t) \otimes (\otimes_{i=n+1}^k 1_i)$  é o Hamiltoniano que dirige a  $n$ -ésima partição do sistema, o atalho via Hamiltonianos contra-diabáticos é feito por meio do Hamiltoniano superadiabático

$$H_{SA}(t) = \sum_{n=1}^k \mathcal{H}_n^{SA}(t) \quad , \quad (170)$$

onde  $\mathcal{H}_n^{SA}(t) = (\otimes_{i=1}^{n-1} 1_i) \otimes H_n^{SA}(t) \otimes (\otimes_{i=n+1}^k 1_i)$ , com  $H_n^{SA}(t)$  sendo o Hamiltoniano superadiabático associado ao  $n$ -ésimo Hamiltoniano  $H_n(t)$ .

A partir do Hamiltoniano da Eq. (83) e da proposição acima a transição da versão adiabática para a superadiabática do TQ do estado de  $n$  q-bits torna-se simples. Assim como no caso adiabático, nós precisamos conhecer apenas o Hamiltoniano contra-diabático no caso do TQ do

estado de um q-bit.

## 6.2 TQ Superadiabático de portas

Para mostrar que o TQ superadiabático pode ser usado para realizar CQ universal, precisamos mostrar que este é capaz de implementar portas quânticas de 1 e 2 q-bits, ou até portas de mais de 2 q-bits. Primeiramente, deixe-nos enunciar mais um teorema, cuja demonstração pode ser verificada no Apêndice F.

**Teorema 2** *Sejam dois Hamiltonianos  $H(t)$  e  $H(t, G)$ , com  $H(t, G) = GH(t)G^\dagger$  para algum unitário  $G$ . Se conhecemos o Hamiltoniano superadiabático  $H_{SA}(t)$  associado a  $H(t)$ , então*

$$H_{SA}(t, G) = GH_{SA}(t)G^\dagger \quad (171)$$

*é o Hamiltoniano superadiabático associado ao Hamiltoniano  $H(t, G)$ .*

Independentemente da evolução que nos propomos a fazer com o Hamiltoniano  $H(t, G)$ , o teorema acima afirma que se conseguirmos escrever  $H(t, G)$  como uma rotação unitária de um outro Hamiltoniano  $H(t)$ , onde conhecemos o Hamiltoniano superadiabático associado a este, então o conhecimento de  $H_{SA}(t, G)$  é imediato e segue da Eq. (171). Em particular, o teorema acima tem grande utilidade para mostrar que podemos realizar o TQ superadiabático de portas.

Para o TQ adiabático de portas de  $n$  q-bits nós já sabemos que, dado um unitário qualquer  $U_n$  de  $n$  q-bits, o TQ adiabático da porta  $U_n$  pode ser feito pelo Hamiltoniano adiabático  $H(s, U_n) = U_n H_{\text{mult}}(s) U_n^\dagger$ , onde  $H_{\text{mult}}(s)$  é dado pela Eq. (83). Assim, é possível usar o Teorema 2 para mostrar que

$$H_{SA}^{\text{mult}}(s, U_n) = U_n H_{SA}^{\text{mult}}(s) U_n^\dagger, \quad (172)$$

deve ser o Hamiltoniano superadiabático que implementará portas de  $n$  q-bits superadiabaticamente. Onde  $H_{SA}^{\text{mult}}(s)$  é o Hamiltoniano superadiabático que realiza o TQ do estado de  $n$  q-bits discutido anteriormente, portanto conhecido. O teorema acima é válido para qualquer Hamiltoniano dependente do tempo  $H(t)$  e qualquer unitário  $G$ , sendo que a única exigência é feita sobre  $G$  que deve ser independente do tempo e satisfaça  $GG^\dagger = 1$ . Em consequência disso, o protocolo descrito aqui nos fornece um modelo universal de CQ.

## 6.3 Complementaridade Energia-Tempo

Aqui nós faremos a estudo do custo energético para realizar CQ via TQ superadiabático. A forma como o custo energético está definido na Eq. (134) revela que não deve haver diferença entre o custo de usar o TQ superadiabático para teleportar apenas os estados ou as portas junto com os estados. Portanto os resultados obtidos para o TQ simples (apenas estados) podem ser aplicados ao caso do TQ de portas.

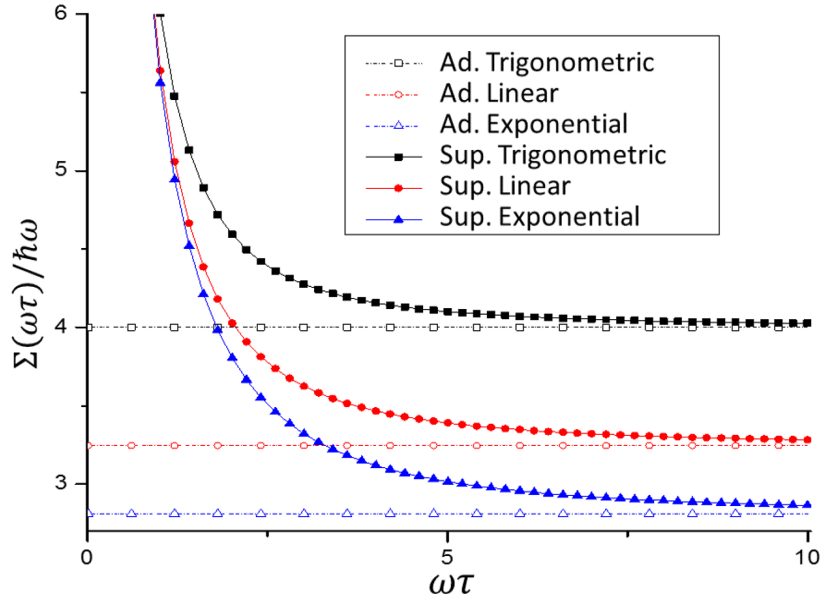


Figura 9: Gráfico da quantidade  $\Sigma_{sing}(\tau)$  para algumas interpolações específicas (curvas com figuras geométricas preenchidas). As linhas horizontais estão indicando o custo energético no limite de tempo adiabático  $\tau \rightarrow \infty$ .

Para fazer a análise do custo energético, deixe-nos inicialmente analisar o caso do TQ de um estado desconhecido de um q-bit. Dado o Hamiltoniano superadiabático da Eq. (163), devido sua forma bloco diagonal podemos escrever

$$\text{Tr} [H_{SA}^2(s)] = 2\text{Tr} \{ [H_{SA}^+(s)]^2 \} , \quad (173)$$

consequentemente  $\|H_{SA}(t)\| = \sqrt{2}\|H_{SA}^+(s)\|$ . Definindo o custo energético de um hipotético Hamiltoniano  $H_{SA}^+(s)$  como  $\Sigma^+(\tau)$ , o custo energético associado ao Hamiltoniano  $H_{SA}(t)$  é dado por

$$\Sigma_{sing}(\tau) = \sqrt{2}\Sigma^+(\tau) . \quad (174)$$

Portanto, o problema se resume ao problema de determinar o custo energético  $\Sigma^+(\tau)$ . A partir da Eq. (162) e do conjunto de autoestados  $|E_n^+(s)\rangle$  e autovalores  $\varepsilon_m(s)$  de  $H^+(s)$ , dados pelas Eqs. (165 – 168) e (37 – 39), respectivamente, nós temos

$$\Sigma^+(\tau) = \int_0^1 \sqrt{\sum_m \left\{ [\varepsilon_m(s)]^2 + \hbar^2 \frac{\mu_m^+(s)}{\tau^2} \right\}} ds , \quad (175)$$

onde  $\mu_m^+(s) = |\langle d_s E_n^+(s) | d_s E_n^+(s) \rangle|$ . Devido a forma complexa dos autoestados para determinadas escolhas das funções  $\eta_i(s)$  e  $\eta_f(s)$  a integral acima é dificilmente solúvel, quando solúvel analiticamente. Nós escolhemos três diferentes interpolações específicas, a saber a interpolação linear com  $\eta_i^{\text{lin}}(s) = 1 - s$  e  $\eta_f^{\text{lin}}(s) = s$ , trigonométrica onde  $\eta_i^{\text{tri}}(s) = \cos(\pi s/2)$  e  $\eta_f^{\text{tri}}(s) = \sin(\pi s/2)$  e a interpolação exponencial em que  $\eta_i^{\text{exp}}(s) = (e^{1-s} - 1)/(e - 1)$  e



$\eta_f^{\text{exp}}(s) = (e^s - 1)/(e - 1)$ . Nós determinamos numericamente o custo  $\Sigma_{\text{sing}}(\tau)$  que foi obtido na Eq. (174) para as interpolações citadas e o resultado encontra-se no gráfico da Fig. 9.

Como mencionado anteriormente, o gráfico representado na Fig. 9 é exatamente o custo energético para implementarmos unitários de 1 q-bit. Além disso, nós também podemos estipular o custo energético esperado para implementar portas de  $n$  q-bits analisando o custo para realizar o TQ de  $n$  q-bits. No caso do TQ de portas de  $n$  q-bits nós temos que (veja Apêndice G)

$$\Sigma_n(\tau) = \sqrt{2^{3(n-1)}} n \Sigma_{\text{sing}}(\tau) \quad (176)$$

é o custo energético requerido para tal ação. É evidente o crescimento do custo energético com o número de q-bits do sistema onde a porta  $U$  deverá atuar bastante significativo. Em certos casos isso não é um problema, pois sabe-se que se somos capazes de implementar portas de 1 q-bit e portas controladas por 1 q-bit, então podemos realizar CQ universal. No caso do conjunto universal composto por rotações de 1 q-bit e CNOT, temos os custos  $\Sigma_1(\tau) = \Sigma_{\text{sing}}(\tau)$  e  $\Sigma_2(\tau) = 4\Sigma_{\text{sing}}(\tau)$ , respectivamente. Em outros desing nós precisamos ir até portas controladas controladas por 2 q-bits, como o conjunto composto por Hadamard e Toffoli, onde tais portas podem ser implementadas a um custo  $\Sigma_1(\tau)$  e  $\Sigma_n(\tau) = 8\sqrt{3}\Sigma_{\text{sing}}(\tau)$ , respectivamente.

## 7 Evoluções Superadiabáticas Controladas e CQ Universal

Nós já discutimos anteriormente sobre EAC e sua utilidade em nos permitir implementar qualquer porta controlada por  $n$ -q-bits. Agora mostraremos como realizar CQ universal de forma superadiabática. Assim como no uso de EAC para realizar CQ universal, aqui nós propomos um modelo híbrido de CQ, onde nós simulamos a funcionalidade de portas quânticas, mas usando evoluções superadiabáticas.

Para este fim, primeiro discutiremos de forma geral como derivar um atalho superadiabático para EAC. Em seguida aplicaremos os principais resultados obtidos para propor um modelo universal de computação quântica superadiabática. Por fim nós faremos a análise da complementaridade energia-tempo, introduzida na seção 5.2, para a implementação de portas  $n$ -controladas.

### 7.1 Evoluções Superadiabáticas Controladas

Como sempre é feito quando tentamos derivar uma versão superadiabática de alguma evolução adiabática, o ponto de partida é o Hamiltoniano adiabático que governa a evolução do sistema. Então para estudar evoluções superadiabáticas controladas (ESC) nós partimos do Hamiltoniano adiabático para EAC da forma como está escrita na Eq. (110) e que novamente escrevemos aqui sob uma forma mais compacta

$$H(s) = \sum_k P_k \otimes H_k(s) , \quad (177)$$

com  $H_k(s) = f(s) H_k^{\text{ini}} + g(s) H_k^{\text{fin}}$ . Para construir o Hamiltoniano contra-diabático para  $H(s)$  nós devemos, portanto, conhecer o conjunto de autoestados e autovalores de  $H(s)$ . Nós podemos mostrar facilmente como obter o conjunto de autoestados e autovalores de  $H(s)$  se conhecermos os respectivos conjuntos para cada  $H_k(s)$ . De fato, deixe que conheçamos todos os autoestados  $\{|E_k^n(s)\rangle\}$  e autovalores  $\{\varepsilon_k^n(s)\}$  de todos os Hamiltonianos  $H_k(s)$ , onde temos que a relação de autovalor

$$H_k(s) |E_k^n(s)\rangle = \varepsilon_k^n(s) |E_k^n(s)\rangle \quad (178)$$

é satisfeita para todo  $H_k(s)$ . Então, a equação de autovalor para  $H(s)$  é dada por

$$H(s) |E_{k,n}(s)\rangle = \varepsilon_k^n(s) |E_{k,n}(s)\rangle , \quad (179)$$

onde

$$|E_{k,n}(s)\rangle = |p_k\rangle |E_k^n(s)\rangle , \quad (180)$$

com  $|p_k\rangle$  sendo o autovetor associado ao único autovalor não nulo de  $P_k$ . A demonstração da relação de autovalor na Eq. (179) é imediata se substituirmos a Eq. (180) diretamente na Eq.

(179). Fazendo isso obtemos

$$\begin{aligned} H(s) |E_{k,n}(s)\rangle &= \sum_m P_m \otimes H_m(s) |p_k\rangle |E_k^n(s)\rangle \\ &= \sum_m (P_m |p_k\rangle) \otimes (H_m(s) |E_k^n(s)\rangle) , \end{aligned}$$

como os operadores  $P_k$ 's formam um conjunto de projetores ortogonais do subespaço  $\mathcal{S}$  nós podemos escrevemos  $P_k$  em sua decomposição espectral como  $P_k = |p_k\rangle \langle p_k|$ , onde os  $|p_k\rangle$  formam uma base para o subespaço  $\mathcal{S}$  de modo que  $\langle p_k | p_m \rangle = \delta_{km}$ , consequentemente observa-se que  $P_k |p_m\rangle = \delta_{km} |p_k\rangle$ . Usando isso, temos

$$\begin{aligned} H(s) |E_{k,n}(s)\rangle &= |p_k\rangle \otimes H_k(s) |E_k^n(s)\rangle \\ &= \varepsilon_k^n(s) |p_k\rangle |E_k^n(s)\rangle = \varepsilon_k^n(s) |E_{k,n}(s)\rangle , \end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (178) na ultima passagem da equação acima. Assim nós temos verificado que a Eq. (179) é satisfeita para  $|E_{k,n}(s)\rangle$  escrito como na Eq. (180). Sabendo que o espaço  $\mathcal{SA}$  tem dimensão  $\dim \mathcal{SA} = \dim \mathcal{S} \dim \mathcal{A}$ , onde  $\dim \mathcal{A}$  e  $\dim \mathcal{S}$  são as dimensões dos subespaços  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente, então precisamos mostrar que o conjunto  $\{|E_{k,n}(s)\rangle\}$  é composto por  $\dim \mathcal{SA}$  vetores ortonormais. Facilmente podemos mostrar que quaisquer dois vetores do conjunto  $\{|E_{k,n}(s)\rangle\}$  satisfazem a condição de ortonormalização  $\langle E_{k,n}(s) | E_{k',n'}(s) \rangle = \delta_{kk'} \delta_{nn'}$ , para isso basta fazer o produto escalar e obtemos

$$\langle E_{k,n}(s) | E_{k',n'}(s) \rangle = \langle p_k | p_{k'} \rangle \langle E_k^n(s) | E_{k'}^{n'}(s) \rangle = \delta_{kk'} \langle E_k^n(s) | E_{k'}^{n'}(s) \rangle ,$$

agora note que para  $k$  e  $k'$  diferentes não podemos garantir que  $\langle E_k^n(s) | E_{k'}^{n'}(s) \rangle = \delta_{kk'} \delta_{nn'}$ , mas podemos garantir que para o mesmo  $k = k'$  nós temos  $\langle E_k^n(s) | E_k^{n'}(s) \rangle = \delta_{nn'}$ . Portanto a equação acima fica

$$\langle E_{k,n}(s) | E_{k',n'}(s) \rangle = \delta_{kk'} \delta_{nn'} , \quad (181)$$

o que mostra que a condição de ortonormalização e consequentemente  $\{|E_{k,n}(s)\rangle\}$  é composto por vetores ortonormais. A contagem da quantidade de estados tem o conjunto  $\{|E_{k,n}(s)\rangle\}$  é simples, para isto basta ver que para cada  $k$  nós temos  $\dim \mathcal{A}$  autoestados  $|E_k^n(s)\rangle$ , como temos  $\dim \mathcal{S}$  possíveis  $k$ 's, implica que a quantidade de elementos do conjunto  $\{|E_{k,n}(s)\rangle\}$  é exatamente  $\dim \mathcal{SA}$ .

Para derivar um atalho superadiabático via Hamiltoniano contra-diabático para evoluções controladas, nós usamos a formas dos autoestados dado na Eq. (180) do Hamiltoniano  $H(s)$  e a forma do Hamiltoniano contra-diabático dado na Eq. (147). Fazendo isso, obtemos que

$$H_{\text{CD}}(s) = \sum_k P_k \otimes H_k^{\text{CD}}(s) \quad (182)$$

é o Hamiltoniano contra-diabático que deve ser somado ao Hamiltoniano adiabático  $H(s)$  para obtermos a evolução adiabática, com

$$H_k^{\text{CD}}(s) = \frac{i\hbar}{\tau} \sum_n |\partial_s E_k^n(s)\rangle \langle E_k^n(s)| + \langle \partial_s E_k^n(s) | E_k^n(s) \rangle |E_k^n(s)\rangle \langle E_k^n(s)|, \quad (183)$$

sendo o Hamiltoniano contra-diabático associado ao  $k$ -ésimo Hamiltoniano que atua sobre o subespaço  $\mathcal{A}$ . Deixe-nos comprovar as Eqs. (182) e (183).

Das Eqs. (147) e (179) nós podemos escrever

$$\begin{aligned} H_{\text{CD}}(s) &= \frac{i\hbar}{\tau} \sum_{k,n} |\partial_s E_{k,n}(s)\rangle \langle E_{k,n}(s)| + \langle \partial_s E_{k,n}(s) | E_{k,n}(s) \rangle |E_{k,n}(s)\rangle \langle E_{k,n}(s)| \\ &= \frac{i\hbar}{\tau} \sum_{k,n} \langle \partial_s E_n(s) | E_n(s) \rangle |p_k\rangle \langle E_k^n(s)| \langle E_k^n(s) | \langle p_k| \\ &\quad + \frac{i\hbar}{\tau} \sum_{k,n} |p_k\rangle \langle \partial_s E_k^n(s) \rangle \langle E_k^n(s) | \langle p_k|, \end{aligned}$$

onde usamos que  $|\partial_s E_{k,n}(s)\rangle = |p_k\rangle \langle \partial_s E_k^n(s)|$  e  $\langle \partial_s E_{k,n}(s) | E_{k,n}(s) \rangle = \langle \partial_s E_n(s) | E_n(s) \rangle$  na última igualdade. Como os projetores  $|p_k\rangle \langle p_k|$  não carregam informações com respeito ao índice  $n$  da segunda soma, ainda podemos escrever  $H_{\text{CD}}(s)$  como

$$H_{\text{CD}}(s) = \sum_k P_k \otimes \left[ \frac{i\hbar}{\tau} \sum_n |\partial_s E_k^n(s)\rangle \langle E_k^n(s)| + \langle \partial_s E_k^n(s) | E_k^n(s) \rangle |E_k^n(s)\rangle \langle E_k^n(s)| \right],$$

onde usamos que  $P_k = |p_k\rangle \langle p_k|$ . De modo que definindo a Eq. (183) podemos obter exatamente a Eq. (182) como resultado do cálculo acima.

Assim, conhecendo como o conjunto de projetores  $\{P_k\}$  se dispõem na soma dada na Eq. (177) e os respectivos Hamiltonianos contra-diabáticos para cada Hamiltoniano adiabático  $H_k(s)$ , então o Hamiltoniano contra-diabático associado ao Hamiltoniano adiabático dado na Eq. (177) é conhecido e facilmente obtido das Eqs. (182) e (183).

Para encontrarmos o Hamiltoniano superadiabático, podemos usar as Eqs. (182) e (139) para mostrar que

$$H_{\text{SA}}(s) = \sum_k P_k \otimes H_k^{\text{SA}}(s) \quad (184)$$

é o Hamiltoniano superadiabático que deve guiar o sistema, onde cada  $H_k^{\text{SA}}(s) = H_k(s) + H_k^{\text{CD}}(s)$  é o Hamiltoniano superadiabático associado ao Hamiltoniano adiabático  $H_k(s)$ . Isso mostra que o custo para implementarmos uma aproximação superadiabática em qualquer evolução adiabática controlada é dado pelo custo de conhecermos o conjunto de autoestados e energias de cada Hamiltoniano  $H_k(s)$ .

## 7.2 Computação Quântica por Evoluções Superadiabáticas Controladas

A ideia da CQ superadiabática é imitar a CQ Adiabática sem o vínculo estabelecido pelo teorema adiabático e para isso nós usamos atalhos para adiabaticidade via Hamiltonianos contra-diabáticos. Em particular, aqui nós propomos a CQ superadiabática via evoluções controladas. Primeiramente mostraremos como implementar portas de 1 q-bit e em seguida mostraremos que portas  $n$ -controladas podem ser implementadas facilmente com uma pequena extensão do subespaço  $S$ .

### 7.2.1 Portas de 1 q-bit via ESC

O atalho para implementar portas de 1 q-bit via ESC pode ser feito por meio da determinação do termo contra-diabático associado ao Hamiltoniano adiabático que nos permite implementar adiabaticamente portas de 1 q-bit, já discutido na seção 4.2, que é dado pela Eq. (113). Combinando os resultados da seção 4.2 com os resultados obtidos na seção anterior nós podemos mostrar que o Hamiltoniano superadiabático para implementar portas de 1 q-bit é dado por

$$H_{SA}(s) = P_{\hat{n}_+} \otimes H_0^{SA}(s) + P_{\hat{n}_-} \otimes H_\phi^{SA}(s) , \quad (185)$$

onde  $H_\xi^{SA}(s)$  é o Hamiltoniano superadiabático associado ao Hamiltoniano adiabático genérico  $H_\xi(s)$  dado pela Eq. (114). Para obter o Hamiltoniano contra-diabático do  $H_\xi^{CD}(s)$  nós usamos que os autoestados de  $H_\xi(s)$  são dados por

$$|E_\xi^0(s)\rangle = \cos(\theta_0 s/2) |0\rangle + e^{i\xi} \sin(\theta_0 s/2) |1\rangle , \quad (186)$$

$$|E_\xi^1(s)\rangle = -\sin(\theta_0 s/2) |0\rangle + e^{i\xi} \cos(\theta_0 s/2) |1\rangle , \quad (187)$$

associados ao nível de energia  $\varepsilon_\xi^n(s) = (-1)^n \hbar\omega$ , com  $n = \{0, 1\}$ . Antes de escrevermos o Hamiltoniano  $H_\xi^{CD}(s)$  primeiro note que  $|\partial_s E_\xi^n(s)\rangle = \lambda_{1-n} |E_\xi^{1-n}(s)\rangle$ , para algum escalar  $\lambda_{1-n}$ , de modo que fica claro que  $\langle \partial_s E_\xi^n(s) | E_\xi^n(s) \rangle = 0$ , assim ficamos com

$$H_\xi^{CD}(s) = \frac{i\hbar}{\tau} \sum_{n=\{0,1\}} |\partial_s E_\xi^n(s)\rangle \langle E_\xi^n(s)| , \quad (188)$$

onde, usando as Eqs. (186) e (187) na relação acima, nós podemos mostrar que  $H_\xi^{CD}(s)$  é dado por

$$H_\xi^{CD}(s) = \hbar \frac{\theta_0}{2\tau} (\sigma_y \cos \xi - \sigma_x \sin \xi) , \quad (189)$$

Com isso o Hamiltoniano superadiabático é dado pela Eq. (185) onde cada Hamiltoniano  $H_\xi^{SA}(s)$  (com  $\xi = \{0, \phi\}$ ) é da forma  $H_\xi^{SA}(s) = H_\xi(s) + H_\xi^{CD}(s)$ , onde o termo contradiabático  $H_\xi^{CD}(s)$  é dado pela Eq. (189). A informação sobre a porta a ser implementada pelo Hamiltoniano  $H_\xi^{SA}(s)$  está contida no conjunto de projetores  $\{P_{\hat{n}_+}, P_{\hat{n}_-}\}$  e no valor do parâmetro  $\phi$  que está impresso no Hamiltoniano superadiabático  $H_\phi^{SA}(s) = H_\phi(s) + H_\phi^{CD}(s)$ .

O resultado mais significativo aqui é a forma simples do termo contra-diabático  $H_{\xi}^{\text{CD}}(s)$  que precisamos implementar. Notamos que para implementar qualquer porta superadiabaticamente nós apenas precisamos adicionar um Hamiltoniano *independente do tempo* ao Hamiltoniano adiabático do sistema. Isso elimina o problema de simular experimentalmente o Hamiltoniano contra-diabático necessário para realizar o atalho, uma vez que *a priori* este pode depender do tempo e ter a forma mais não trivial que imaginarmos.

### 7.2.2 Portas $n$ -controladas via ESC

Mostramos agora que o Hamiltoniano adiabático para implementar portas  $n$ -controladas pode ser derivado facilmente fazendo apenas uma extensão no subespaço alvo  $\mathcal{S}$  e ajustando adequadamente o conjunto de projetores sobre  $\mathcal{S}$ .

Aqui usamos novamente que o atalho superadiabático é feito apenas determinando os Hamiltonianos superadiabáticos que atuam sobre o subsistema auxiliar  $\mathcal{A}$ . Sabendo que Hamiltoniano adiabático usado para implementar rotações controladas quaisquer sobre 1 q-bit é dado pela Eq. (131), então da Eq. (184) temos

$$H_{\text{SA}}(s) = [1 - P_{N-1, \hat{n}_-}] \otimes H_0^{\text{SA}}(s) + P_{N-1, \hat{n}_-} \otimes H_{\phi}^{\text{SA}}(s) \quad , \quad (190)$$

que é o Hamiltoniano superadiabático usado para realizar essa tarefa, onde os hamiltonianos  $H_{\xi}^{\text{SA}}(s)$  são os mesmos determinados na seção anterior com o Hamiltoniano contra-diabático dado pela Eq. (189).

O papel do parâmetro  $\theta_0$  na versão superadiabática é o mesmo papel exercido por este na versão adiabática apresentada anteriormente. De fato, para o caso de portas  $n$ -controladas o sistema inicia sua evolução em um estado  $|\Psi_n(0)\rangle$  dado pela Eq. (129) e evolui superadiabaticamente, governado pelo Hamiltoniano  $H_{\text{SA}}(s)$  dado pela Eq. (190), até o estado final  $|\Psi_n(0)\rangle$  dado pela Eq. (132). Assim, fica claro que precisamos realizar uma medida ao final do processo, onde  $\theta_0$  terá o papel de definir a probabilidade de sucesso da computação, onde tomando  $\theta_0 \rightarrow \pi$  nós teremos probabilidade de sucesso  $p \rightarrow 1$ . Como mencionado na seção 4.2 essa medida pode ser evitada adotando  $\theta_0 = \pi$ .

### 7.3 A complementaridade energia-tempo

Em evoluções superadiabáticas nós podemos definir um tempo total de evolução inferior ao tempo adiabático, de tal forma que esse tempo pode ser pré-definido na implementação física da evolução superadiabática em laboratório. O moderador do tempo será, portanto, o custo energético para realizar a evolução do sistema e que é, em geral, definido pela Eq. (134). Agora nós discutiremos esse custo para implementar portas controladas por  $n$  q-bits em ESC.

O ponto de partida é a Eq. (134) para o Hamiltoniano dado na Eq. (190). Assim, definimos

$$\Sigma_{SCE}(\tau, n) = \int_0^1 \|H_{SA}(s)\| ds, \quad (191)$$

onde  $H_{SA}(t)$  é dado na Eq. (190). Estamos denotando o custo como uma função de  $\tau$  devido o resultado expresso na Eq. (162), onde para cada escolha de  $\tau$  teremos um custo diferente. Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} \|H_{SA}(s)\| &= \sqrt{\text{Tr}[H_{SA}^2(s)]} \\ &= \sqrt{\text{Tr}\{(1 - P_{N-1, \hat{n}_-}) \otimes [H_0^{SA}(s)]^2\} + \text{Tr}\{P_{N-1, \hat{n}_-} \otimes [H_\phi^{SA}(s)]^2\}} \\ &= \sqrt{\text{Tr}\{(1 - P_{N-1, \hat{n}_-})\} \text{Tr}\{[H_0^{SA}(s)]^2\} + \text{Tr}\{P_{N-1, \hat{n}_-}\} \text{Tr}\{[H_\phi^{SA}(s)]^2\}}, \end{aligned}$$

onde na ultima passagem usamos que  $\text{Tr}\{A \otimes B\} = \text{Tr}\{A\} \text{Tr}\{B\}$ . Como na base  $\{|m, \hat{n}_\mu\rangle\}$  o termo  $1 - P_{N-1, \hat{n}_-}$  é uma matriz diagonal com um elemento nulo e  $2N - 1$  elementos iguais a 1 e  $\text{Tr}\{P_{N-1, \hat{n}_-}\}$  tem apenas um elemento não nulo e igual a 1, temos

$$\|H_{SA}(s)\| = \sqrt{(2N - 1) \text{Tr}\{[H_0^{SA}(s)]^2\} + \text{Tr}\{[H_\phi^{SA}(s)]^2\}}. \quad (192)$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{[H_\xi^{SA}(s)]^2\} &= \text{Tr}\{[H_\xi(s) + H_\xi^{CD}(s)]^2\} \\ &= \text{Tr}\{[H_\xi(s), H_\xi^{CD}(s)]\} + \text{Tr}\{H_\xi^2(s)\} + \text{Tr}\{[H_\xi^{CD}(s)]^2\}. \end{aligned}$$

Na subseção 5.2.2 vimos que em evoluções superadiabáticas temos  $\text{Tr}\{[H(s), H_{CD}(s)]\} = 0$ , onde  $H_{CD}(s)$  é o termo contra-diabático associado ao Hamiltoniano adiabático  $H(s)$ , então podemos escrever que  $\text{Tr}\{[H_\xi(s), H_\xi^{CD}(s)]\} = 0$ , portanto

$$\text{Tr}\{[H_\xi^{SA}(s)]^2\} = 2\hbar^2\omega^2 + \text{Tr}\{[H_\xi^{CD}(s)]^2\}, \quad (193)$$

onde já usamos que  $\text{Tr}\{H_\xi^2(s)\} = \sum_{k=\{0,1\}} [\mathcal{E}_\xi^k(s)]^2 = 2\hbar^2\omega^2$ . Por outro lado, da Eq. (159) tem-se que

$$\text{Tr}\{[H_\xi^{CD}(s)]^2\} = \frac{\hbar^2}{\tau^2} \sum_{k=\{0,1\}} \langle d_s E_\xi^k(s) | d_s E_\xi^k(s) \rangle = \frac{\hbar^2 \theta_0^2}{2\tau^2}. \quad (194)$$

Note que as quantidades  $\text{Tr}\{[H_\xi^{CD}(s)]^2\}$  e  $\text{Tr}\{H_\xi^2(s)\}$  independem de  $\xi$ , então da Eq. (192) temos

$$\|H_{SA}(s)\| = \sqrt{2N} \sqrt{\text{Tr}\{[H_\xi^{SA}(s)]^2\}}. \quad (195)$$

Portanto substituindo as Eqs. (193), (194) na equação acima e escrevendo  $N = 2^n$ , a Eq.

(191) nos fornece

$$\Sigma_{SCE}(\tau, n) = \hbar\omega \sqrt{2^{n+2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\theta_0}{2\tau\omega}\right)^2}, \quad (196)$$

que é o custo para implementar portas de um q-bit controladas por  $n$  qubits. Da Eq. acima podemos ver que o custo também depende diretamente do parâmetro de sucesso na computação  $\theta_0$ , assim escrevemos  $\Sigma_{SCE}(\tau, n) \rightarrow \Sigma_{SCE}(\tau, n, \theta_0)$ . Além disso, o custo para implementar portas controladas por  $n$  q-bits pode ser escrita como

$$\Sigma_{SCE}(\tau, n, \theta_0) = \sqrt{2^n} \Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0), \quad (197)$$

onde

$$\Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) = 2\hbar\omega \sqrt{1 + \left(\frac{\theta_0}{2\tau\omega}\right)^2}, \quad (198)$$

é o custo para implementar portas de um q-bit. A Fig. 10 mostra o comportamento do custo para implementar portas de um q-bit  $\Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  para alguns valores específicos do parâmetro  $\theta_0$ .

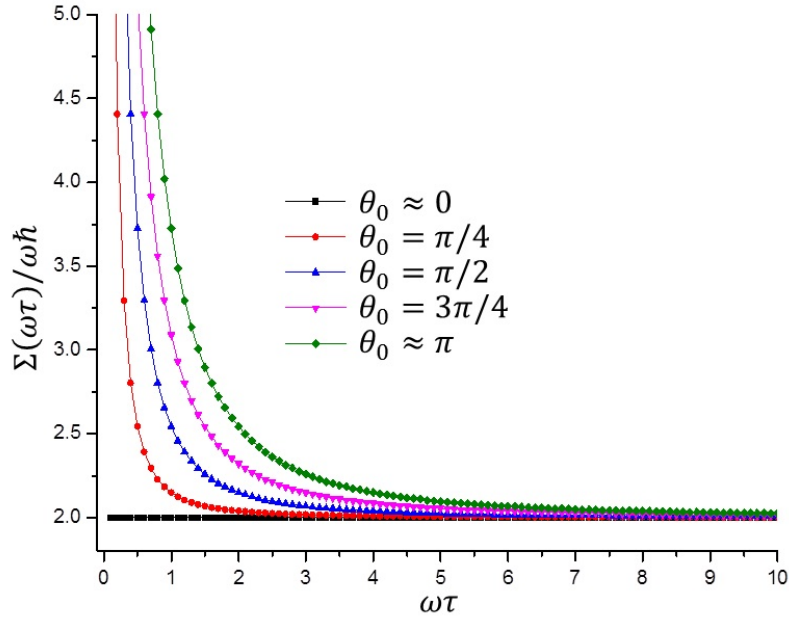


Figura 10: Custo energético em unidades de  $\hbar\omega$  como uma função de  $\omega\tau$  para diferentes valores do parâmetro  $\theta_0$ .

Da Fig. 10 nós vemos que o maior custo energético é aquele associado à evolução onde o estado final é tal que  $\theta_0 = \pi$ . Esse custo pode ser explicado pelo fato de que, visto na esfera de Bloch, para diferentes valores de  $\theta_0$  o estado final encontra-se a diferentes distâncias do estado inicial.



## 7.4 Computação Superadiabática Probabilística

Na subseção 4.4 discutimos o impacto sobre a média do custo energético ao assumirmos diferentes valores para o parâmetro  $\theta_0$ , onde introduzimos a definição de computação probabilística adiabática. Aqui nós tentaremos responder a mesma pergunta feita na subseção 4.4, mas analisando a realização de computação probabilística superadiabaticamente. Por simplicidade, vamos analisar o caso da implementação de portas simples de 1 q-bit já que a Eq. (197) nos garante que não haverá perda de generalidade em nossa análise.

O estado final da evolução na implementação de portas de 1 q-bit é dada pela Eq. (117), onde temos uma probabilidade de sucesso de  $\sin^2(\theta_0/2)$ , o custo energético  $\Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  é dado pela Eq. (198). No caso de falha do protocolo, devemos repetir o processo usando o mesmo procedimento e para isso gastaremos mais uma quantidade  $\Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  de energia (considerando que  $\theta_0$  não muda). A depender do valor de  $\theta_0$ , esse processo pode se repetir várias vezes, assim, depois de  $k$  evoluções, nós teremos um custo dado por  $k\Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$ . Sendo  $\sin^2(\theta_0/2)$  a probabilidade de sucesso a cada medida, em média precisaremos de  $\langle N \rangle = 1/\sin^2(\theta_0/2)$  repetições para que tenhamos sucesso na computação. Portanto, o custo energético médio  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  da computação probabilística é

$$\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) = \langle N \rangle \Sigma_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) = 2\hbar\omega \cos \sec^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{\theta_0^2}{4(\omega\tau)^2}}. \quad (199)$$

Então no intervalo  $\mathcal{I}_{\theta_0} : (0, \pi]$ , certamente existe um  $\theta_0$  que minimiza  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  e nosso intuito aqui é determinar seu valor e se há alguma dependência com a escolha de  $\tau$ . O intervalo  $\mathcal{I}_{\theta_0}$  não leva em consideração o valor  $\theta_0 = 0$ . De fato, note que no limite  $\theta_0 \rightarrow 0$  nós teremos  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) \rightarrow \infty$ , o que significa que mesmo se fizermos a evolução tendo certeza da falha do processo ( $\theta_0 = 0$ ) nós ainda temos um gasto de  $\Sigma(0) = 2\hbar\omega$ , e se insistirmos na tentativa de sucesso nós iremos repetir o processo infinitamente, o que implica no fato que  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) \rightarrow \infty$ .

Sabemos que a criticalidade (pontos de mínimo e máximo) de uma função pode ser estudado a partir de simples derivações. Faremos o estudo analítico da criticalidade da função  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  a ponto de obter uma relação para o valor de  $\theta_0$  que criticaliza  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$ .

Usando regras simples de derivação nós podemos mostrar que para a função  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  nós temos

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} \bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) = \frac{\cos \sec^2(\theta_0/2)}{2(\omega\tau)^2 \sqrt{1 + \theta_0^2/4(\omega\tau)^2}} \left\{ \theta_0 - [4(\omega\tau)^2 + \theta_0^2] \cot \frac{\theta_0}{2} \right\}. \quad (200)$$

Para que nós tenhamos os pontos críticos de  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$  precisamos encontrar o(s) valor(es) de  $\theta_0$  tal(is) que  $d_{\theta_0} \bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) = 0$ . Primeiro devemos notar que isso só acontece quando

$$\theta_0^{cri} - [4(\omega\tau)^2 + \theta_0^{cri2}] \cot \frac{\theta_0^{cri}}{2} = 0, \quad (201)$$

pois  $\cos \sec(\theta_0/2) \neq 0 \forall 0 < \theta_0 \leq \pi$ .

Da equação acima já podemos ver a dependência do valor de  $\theta_0^{cri}$  (valor de  $\theta_0$  que criticaliza  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$ ) com a quantidade  $\omega\tau$ . Além disso, o teste da segunda derivada, que nos fornece a concavidade da curva formada pelo gráfico de  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$ , acusa que  $d_{\theta_0}^2 \bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0) > 0$  para todo  $0 < \theta_0 \leq \pi$ , consequentemente  $\theta_0^{cri}$  é o próprio  $\theta_0^{\min}$  que minimiza  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$ . Agora deixe-nos escrever a Eq. (201) na forma

$$\omega\tau = \frac{\sqrt{\theta_0^{\min}}}{2} \sqrt{\tan\left(\frac{\theta_0^{\min}}{2}\right) - \theta_0^{\min}},$$

que representa a relação entre a quantidade  $\omega\tau$  e  $\theta_0^{\min}$ . Note, portanto, que existe uma condição sobre os valores de  $\theta_0^{\min}$  e essa condição diz que  $\theta_0^{\min}$  é tal que

$$\tan\left(\frac{\theta_0^{\min}}{2}\right) \geq \theta_0^{\min}, \quad (202)$$

já que  $\omega\tau$  é real. Com isso nós encontramos que existem valores de  $\theta_0^{\min}$  que não são valores críticos da função  $\bar{\Sigma}_{SCE}^{sing}(\tau, \theta_0)$ . O gráfico da Fig. 11 mostra como varia o valor do parâmetro  $\theta_0^{\min}$  para alguns valores da quantidade  $\omega\tau$ .

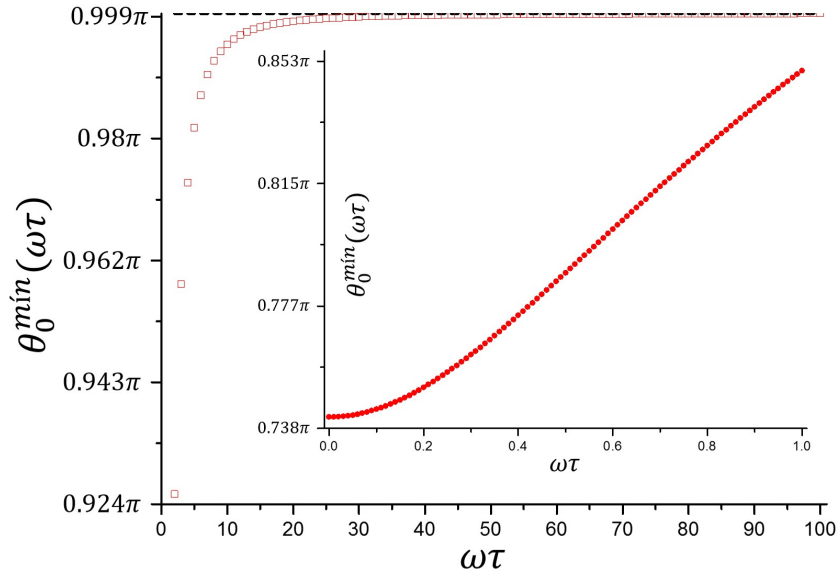


Figura 11: Gráfico de  $\theta_0^{\min}$  em função da quantidade  $\omega\tau$  determinado numericamente com precisão de  $10^{-5}$  onde variamos a quantidade  $\omega\tau$  em intervalos de  $10^{-6}$ . Nós mostramos  $\theta_0^{\min}$  em função da quantidade  $\omega\tau$  para valores de  $\omega\tau > 1$ . Podemos ver que a medida que a quantidade  $\omega\tau$  cresce, o valor de  $\theta_0^{\min}$  se aproxima de  $\pi$  (linha horizontal tracejada em preto). No inset nós mostramos o gráfico das mesmas quantidades onde o intervalo de valores de  $\omega\tau$  são tais que  $0 \leq \omega\tau \leq 1$ .

Diferentemente do caso adiabático, nós podemos ver que a resposta para nossa pergunta, um tanto não trivial, é que sim. Há valores específicos de  $\theta_0$  que, em média, poderia nos fornecer um ganho energético fazendo a computação probabilística superadiabática. Além disso,

nossa liberdade na escolha do tempo total de evolução tem um impacto direto no  $\theta_0$  ótimo. Obviamente, custos relacionados ao processo de medida não estão sendo contabilizados nessa análise.

## 8 Conclusões e Perspectivas Futuras

Nessa dissertação nós nos propomos a estudar modelos de CQ universal usando evoluções adiabáticas e superadiabáticas (via Hamiltonianos contra-diabáticos). No cenário de CQ Adiabática nós estendemos os resultados obtidos por Bacon e Flammia [41], onde mostramos como usar o TQ para implementar portas arbitrárias de  $n$  q-bits, de modo que nós estendemos a classe de portas quânticas que podem ser implementadas quando usamos o TQ como um primitivo para CQ. Para isso nós analisamos o TQ adiabático do estado desconhecido de um q-bit fazendo uso das simetrias do Hamiltoniano adiabático que realiza tal tarefa. Os resultados puderam, portanto, ser estendidos para portas de  $n$  q-bits usando o TQ adiabático de estados de  $n$  q-bits juntamente com a Proposições 1 e 2. Além disso, ainda dentro do cenário adiabático, mostramos como implementar rotações controladas por  $n$  q-bits (que caracterizam uma porta controlada por  $n$  q-bits) usando EAC. Esse resultado é uma extensão do modelo proposto por Hen [42].

Derivando atalhos para adiabaticidade de modelos adiabáticos de CQ nós propomos aqui dois modelos de CQ superadiabática. O primeiro modelo proposto aqui é o de CQ via TQ superadiabático [44]. Iniciamos o estudo mostrando como realizar o TQ superadiabático de um estado quântico desconhecido de 1 q-bit. A partir dessa proposta nós mostramos como realizar o TQ de um estado quântico de  $n$  q-bits. Esses resultados formam o alicerce que usamos para mostrar como usar o TQ superadiabático para implementar portas quânticas (controladas ou não) de  $n$  q-bits. Com a ajuda de dois teoremas que foram introduzidos durante o desenvolvimento do modelo, nós mostramos que toda a teoria se constrói em cima do TQ de 1 q-bit e que diferentes implementações de CQ universal podem ser realizadas combinando simples transformações unitárias (que dependem da porta a ser implementada pelo modelo) e a extensão do número de q-bits do sistema que usamos para codificar o estado onde a porta atuará.

No segundo modelo proposto nós mostramos como ESC pode ser usado para realizar CQ universal usando diferentes conjuntos universais de portas quânticas [43]. O modelo sustenta-se na introdução de um Hamiltoniano contra-diabático independente do tempo que deve ser somado ao Hamiltoniano adiabático do sistema. Além disso, diferentes conjuntos universais de portas podem ser implementadas tomando como base o mesmo Hamiltoniano contra-diabático.

A performance da CQ superadiabática foi caracterizada aqui pelo estudo da complementaridade energia-tempo em uma evolução superadiabática via Hamiltonianos contra-diabáticos. Nós usamos limites para o tempo total de evolução em sistemas quânticos (QSL) que nos sugerem que o tempo requerido para uma evolução superadiabática é compatível com tempos arbitrariamente pequenos, e além disso mostramos que essa arbitrariedade no tempo de evolução está apenas vinculado pelo custo energético necessário para realizar tal evolução. Nós mostramos que, em geral, uma evolução superadiabática tem um custo energético maior do que a sua análoga evolução adiabática e que este custo se reduz ao custo adiabático no limite de longos tempos de evolução ( $\tau\omega \rightarrow \infty$ ). Nesse caso, a performance da CQ superadiabática, independentemente de como ela é implementada, é vantajosa quando queremos um menor tempo

de processamento de informação quântica.

Uma vez que em sistemas quânticos abertos existe uma competição entre o tempo requerido por uma evolução adiabática (tempos longos) e a escala de tempo de decoerência (tempos curtos), cabe ressaltar que a formulação superadiabática é promissora no cenário de evoluções sob decoerência, em que as interações inevitáveis do sistema com o seu ambiente são levadas em consideração. Assim, a formulação superadiabática para sistemas abertos [73] tem o potencial de fornecer um tempo de execução ótimo para a realização do circuito mas de modo a manter ainda alguma proteção do sistema contra decoerência. Desse modo, o tempo total de evolução superadiabática nesse novo cenário deve ser estudando usando extensões dos limites para o tempo total de evolução em sistemas quânticos abertos [74, 75]. Esse tópico é deixado como desafio para pesquisa futura.

## A Apêndice A: Lema de Riemann-Lebesgue

Aqui nós faremos uma simples demonstração do Lema de Riemann-Lebesgue, que é enunciado como

**Lema 1 (Lema de Riemann-Lebesgue)** *Seja  $f(x)$  uma função integrável cuja integral existe em qualquer intervalo da variável  $x$  e que  $\int_a^b f(x) dx = M_{ab}$  para algum  $M_{ab}$  finito. Então*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{iLx} dx \rightarrow 0 .$$

**Prova 1** *Seja  $f(x)$  como no enunciado, então façamos uma mudança de variável na integral de forma que  $Lx = k$ , portanto  $dx \rightarrow dk/L$  e  $[a, b] \rightarrow [aL, bL]$  e portanto temos*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{iLx} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{La}^{Lb} f(k) e^{ik} dk .$$

*como estamos a considerar que  $\int_a^b f(x) dx = M_{ab}$  para algum  $M_{ab}$  finito em todo intervalo de  $x$ , consequentemente  $\int_{La}^{Lb} f(k) = M_{ab}^k$  para algum  $M_{ab}^k$  também finito. O valor absoluto da função  $f(k) e^{ik}$  é exatamente o valor absoluto da função  $f(k)$ , pois  $|f(k) e^{ik}| = |f(k)|$ , assim nós temos garantido que a integral  $\int_{La}^{Lb} f(k) e^{ik} dk$  não diverge. Assim nós podemos escrever*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{La}^{Lb} f(k) e^{ik} dk = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M_{ab}^k}{L} \rightarrow 0 ,$$

*pois  $M_{ab}^k$  é um número finito.*

## B Apêndice B: Prova da Proposição 2

A demonstração da Proposição 2 é imediata e é como segue. Considere dois operadores  $A$  e  $B$  de modo que existem outros dois operadores  $A(U) = UAU^\dagger$  e  $B(U) = UBU^\dagger$ , para algum unitário  $U$ . Considerando que  $[A, B] = 0$ , então

$$\begin{aligned}[A, B] &= U [A, B] U^\dagger = U (AB - BA) U^\dagger \\ &= U (AU^\dagger UB - BU^\dagger UA) U^\dagger \\ &= A(U) B(U) - B(U) A(U) = [A(U), B(U)]\end{aligned}$$

onde foi usado que  $U^\dagger U = 1$ . Isso conclui a prova da Proposição 2.

## C Apêndice C: Limite de Velocidade Quântica

Aqui nós deduziremos o resultado expresso na Eq. (148) reproduzindo detalhadamente os cálculos presentes na Ref. [71].

Inicialmente considere um hamiltoniano  $H(t)$  que faz o sistema evoluir de um estado inicial puro  $|\psi(0)\rangle$  até um estado final desejado  $|\psi(t)\rangle$ , não necessariamente ortogonal a  $|\psi(0)\rangle$ . Com isso a evolução é governada pela equação de Schrödinger

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle, \quad (203)$$

onde estamos considerando, a priori, que  $H(t)$  é o mais geral possível, ou seja,  $H(t) \neq H$  e  $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$ , para algum  $t_1 \neq t_2$ . A ideia é definirmos a distância entre dois estados quaisquer na esfera de Bloch, a partir da fidelidade  $F(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)$ , como

$$\mathcal{L}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \arccos[F(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)] = \arccos[|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|], \quad (204)$$

para estados puros [9]. A partir desta definição fica claro que  $0 \leq \mathcal{L}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \leq \pi/2$ . Essa escolha é tão boa quanto a escolha da métrica definida pela distância de traço como medida de distância entre  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ , pois para estados puros elas são equivalentes [9]. Derivando a Eq. (204) com relação ao tempo e depois tomando apenas o módulo nós ficamos com

$$|d_t \mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)| = \frac{|(d_t |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle)|}{\sin[\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]}. \quad (205)$$

Na equação acima podemos olhar para a quantidade  $d_t \mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)$  como uma velocidade definida na esfera de Bloch. Agora precisamos usar a desigualdade

$$|(d_t |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle)| \leq |d_t [\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle]|, \quad (206)$$

com a igualdade ocorrendo se  $\text{Re}[\langle\psi(0)|H(t)|\dot{\psi}(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi(0)\rangle] = 0$ , para obter

$$|d_t \mathcal{L}(\psi_0, \psi_t) \sin[\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]| \leq \frac{1}{\hbar} |\langle\psi(0)|H(t)|\psi(t)\rangle|. \quad (207)$$

Antes de prosseguirmos, deixe-nos demonstrar a desigualdade presente na Eq. (206). Considere  $|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle| = \sqrt{\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi(0)\rangle}$ , então derivando nós podemos escrever

$$\begin{aligned} d_t |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle| &= \frac{1}{2} \frac{\langle\psi(0)|\dot{\psi}(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi(0)\rangle + \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \langle\dot{\psi}(t)|\psi(0)\rangle}{|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|} \\ &= \frac{1}{2i\hbar} \frac{\langle\psi(0)|H(t)|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi(0)\rangle - \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|H(t)|\psi(0)\rangle}{|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|}, \end{aligned}$$



como em geral  $\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \langle \dot{\psi}(t) | \psi(0) \rangle$  é complexo, temos

$$d_t |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle| = \frac{1}{\hbar} \frac{\text{Im} [\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle]}{|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|} .$$

então a quantidade  $|(d_t |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|)|$  é obtida tomando o módulo, assim

$$|d_t |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|| = \frac{1}{\hbar} \frac{|\text{Im} [\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle]|}{|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|} .$$

Agora usa-se a desigualdade  $|a + ib| \geq |b|$ , onde a igualdade acontece quando  $a = 0$ , ou seja  $\text{Re}[a + ib] = 0$ . Logo temos

$$|\text{Im} [\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle]| \leq |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle| ,$$

com a desigualdade para  $\text{Re}[\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle] = 0$ . Portanto

$$|d_t |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|| \leq \frac{1}{\hbar} \frac{|\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|}{|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|} = \frac{1}{\hbar} |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle| ,$$

então usando a Eq. de Schrödinger, ficamos com

$$|d_t |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|| \leq |d_t \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle| .$$

Como queríamos mostrar.

Agora podemos voltar ao desenvolvimento iniciado anteriormente. Para facilitar o entendimento do próximo passo, escrevamos

$$|d_t \mathcal{L}(\psi_0, \psi_t) \sin [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]| = d_t \cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)] , \quad (208)$$

de modo que a Eq. (207) fica escrita como

$$|d_t \cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]| \leq \frac{1}{\hbar} |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle| .$$

Agora integramos ambos os lados da desigualdade obtemos

$$\int_0^\tau dt |d_t \cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]| \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle| , \quad (209)$$

onde para o lado esquerdo da Eq. (209) podemos escrever

$$\int_0^\tau dt |d_t \cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)]| \geq \left| \int_0^{\mathcal{L}(|\psi(0)\rangle, |\psi(\tau)\rangle)} d \cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)] \right| = |\cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_\tau)] - 1|$$

e, por outro lado, usando o teorema do valor médio para o lado direito da Eq. (209) nós encon-

tramos

$$\int_0^\tau dt |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle| = \tau E(\tau) \quad , \quad (210)$$

com  $E(\tau)$  sendo o valor médio da função  $|\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle|$  no intervalo  $\mathcal{I} : [0, \tau]$ . Em conclusão nós obtemos

$$\tau E(\tau) \geq \left| \cos [\mathcal{L}(\psi_0, \psi_t)] - 1 \right| \quad , \quad (211)$$

com a quantidade  $E(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt |\langle \psi(0) | H(t) | \psi(t) \rangle|$ .

## D Apêndice D: Prova do Teorema 1

A demonstração do Teorema 1 é dada como segue. Inicialmente nós consideramos um Hamiltoniano  $H(t)$  tal que  $[H(t), \Pi_z] = 0$ , então temos  $[H_{SA}(t), \Pi_z] = [H_{CD}(t), \Pi_z]$ . Escrevendo explicitamente o comutador, temos

$$[H_{CD}(t), \Pi_z] = H_{CD}(t) \Pi_z - \Pi_z H_{CD}(t) .$$

Como  $\Pi_z$  e  $H(t)$  são diagonais na mesma base, então um autoestado  $|n(t)\rangle$  de  $H_0(t)$  tem paridade em  $\Pi_z$  bem definida e escrevemos  $\Pi_z |n(t)\rangle = (-1)^n |n(t)\rangle$ . Usando que  $\Pi_z |\dot{n}(t)\rangle = (-1)^n |\dot{n}(t)\rangle$  facilmente mostra-se que  $H_{CD}(t) \Pi_z = \Pi_z H_{CD}(t)$ , portanto temos  $[H_{CD}(t), \Pi_z] = 0$ , consequentemente temos  $[H_{SA}(t), \Pi_z] = 0$ . Por outro lado, se  $[H_0(t), \Pi_x] = 0$ , então temos  $[H_{SA}(t), \Pi_x] = [H_{CD}(t), \Pi_x]$ .

Calculando um elemento de matriz de  $[H_{CD}(t), \Pi_x]$  na base de autoestados de  $H_0(t)$  dado por

$$\begin{aligned} [H_{CD}(t), \Pi_x]_{kl} &= \langle k(t) | [H_{CD}(t), \Pi_x] | l(t) \rangle \\ &= [H_{CD}(t) \Pi_x]_{kl} - [\Pi_x H_{CD}(t)]_{kl} \end{aligned}$$

Usando que  $\Pi_x |n(t)\rangle = |n'(t)\rangle$ , onde  $|n(t)\rangle$  e  $|n'(t)\rangle$  tem paridades opostas, e que  $\Pi_x |\dot{n}(t)\rangle = |\dot{n}'(t)\rangle$ , podemos escrever que

$$\begin{aligned} [\Pi_x H_{CD}(t)]_{kl} &= i\hbar \langle k'(t) | \dot{l} \rangle + \langle k'(t) | l(t) \rangle \langle \dot{l}(t) | l(t) \rangle \\ &= i\hbar \langle k(t) | \dot{l}'(t) \rangle + \langle k(t) | l'(t) \rangle \langle \dot{l}'(t) | l'(t) \rangle = [H_{CD}(t) \Pi_x]_{kl} \end{aligned}$$

Portanto  $[H_{CD}(t), \Pi_x]_{kl} = 0$ . Como queríamos demonstrar.

## E Apêndice E: Prova da Proposição 3

Para demonstrar a validade da proposição 3, considere um sistema  $k$ -partido onde o Hamiltoniano que evolui o sistema é que tem a forma da Eq. (169) e dado por

$$H(t) = \sum_{n=1}^k \mathcal{H}_n(t) \quad , \quad (212)$$

onde  $\mathcal{H}_n(t) = (\otimes_{i=1}^{n-1} 1_i) \otimes H_n(t) \otimes (\otimes_{i=n+1}^k 1_i)$  é o Hamiltoniano que dirige a  $n$ -ésima partição do sistema. O Hamiltoniano  $H(t)$  trata portanto de sistemas não interagentes. O Hamiltoniano contra-diabático associado à  $H(t)$  é obtido usando o conjunto de autoestados de  $H(t)$ . Não é difícil verificar que tais autoestados são dados por

$$|E_{\{n_k\}}(t)\rangle = |E_{n_1 \dots n_k}(t)\rangle = \bigotimes_{j=1}^k |E_{n_j}^j(t)\rangle \quad , \quad (213)$$

onde  $|E_{n_j}^j(t)\rangle$  denota o  $n_j$ -ésimo autoestado do Hamiltoniano  $H_j(t)$ . É importante mencionar que a relação de completude sobre cada subsistema estabelece que

$$\sum_{n_m} |E_{n_m}(t)\rangle \langle E_{n_m}(t)| = 1_n \quad . \quad (214)$$

Assim, temos que

$$H_{\text{CD}}(t) = i\hbar \sum_{\{n_k\}} |\dot{E}_{\{n_k\}}(t)\rangle \langle E_{\{n_k\}}(t)| + \langle \dot{E}_{\{n_k\}}(t) | E_{\{n_k\}}(t) \rangle |E_{\{n_k\}}(t)\rangle \langle E_{\{n_k\}}(t)| \quad , \quad (215)$$

onde denotamos  $\sum_{\{n_k\}} = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_k}$ . Derivando a Eq. (213) nós temos

$$\begin{aligned} |\dot{E}_{\{n_k\}}(t)\rangle &= |\dot{E}_{n_1}^1(t)\rangle |E_{n_2}^2(t)\rangle \dots |E_{n_k}^k(t)\rangle + |E_{n_1}^1(t)\rangle |\dot{E}_{n_2}^2(t)\rangle \dots |E_{n_k}^k(t)\rangle \\ &+ \dots + |E_{n_1}^1(t)\rangle |E_{n_2}^2(t)\rangle \dots |\dot{E}_{n_k}^k(t)\rangle \quad , \end{aligned} \quad (216)$$

que pode ser reescrito sob a forma

$$|\dot{E}_{\{n_k\}}(t)\rangle = \sum_a |\Lambda_{n_a}^a(t)\rangle \quad , \quad (217)$$

onde  $|\Lambda_{n_a}^a(t)\rangle = (\otimes_{i=1}^{a-1} |E_{n_i}^i(t)\rangle) \otimes |\dot{E}_{n_a}^a(t)\rangle \otimes (\otimes_{i=a+1}^k |E_{n_i}^i(t)\rangle)$ , com  $a = \{1, k\}$ . Dessa forma nós podemos notar que

$$\langle \dot{E}_{\{n_k\}}(t) | E_{\{n_k\}}(t) \rangle = \sum_a \langle \dot{E}_{n_a}^a(t) | E_{n_a}^a(t) \rangle \quad , \quad (218)$$

$$|\dot{E}_{\{n_k\}}(t)\rangle \langle E_{\{n_k\}}(t)| = \sum_a \Gamma_{\{n_k\}}^a(t) \quad , \quad (219)$$

onde usamos que  $\langle \Lambda_{n_a}^a(t) | E_{\{n_k\}}(t) \rangle = \langle \dot{E}_{n_a}^a(t) | E_{n_a}^a(t) \rangle$  na primeira igualdade acima e onde nós definimos

$$\Gamma_{\{n_k\}}^a(t) = (\otimes_{i=1}^{a-1} |E_{n_i}^i(t)\rangle \langle E_{n_i}^i(t)|) \otimes |\dot{E}_{n_a}^a(t)\rangle \langle E_{n_a}^a(t)| \otimes (\otimes_{i=a+1}^k |E_{n_i}^i(t)\rangle \langle E_{n_i}^i(t)|) . \quad (220)$$

Então, substituindo as relações (218) e (219) em (215) nós ficamos com

$$H_{\text{CD}}(t) = i\hbar \sum_{\{n_k\}} \sum_a \Gamma_{\{n_k\}}^a(t) + \langle \dot{E}_{n_a}^a(t) | E_{n_a}^a(t) \rangle |E_{\{n_k\}}(t)\rangle \langle E_{\{n_k\}}(t)| , \quad (221)$$

Fazendo uso da completitude (214), nós podemos encontrar que

$$\sum_{\{n_k\}} \Gamma_{\{n_k\}}^a(t) = (\otimes_{i=1}^{a-1} 1_i) \otimes \sum_{n_a} |\dot{E}_{n_a}^a(t)\rangle \langle E_{n_a}^a(t)| \otimes (\otimes_{i=a+1}^k 1_i) , \quad (222)$$

e que

$$\sum_{\{n_k\}} \langle \dot{E}_{n_a}^a(t) | E_{n_a}^a(t) \rangle |E_{\{n_k\}}(t)\rangle \langle E_{\{n_k\}}(t)| = (\otimes_{i=1}^{a-1} 1_i) \otimes \Phi^a(t) \otimes (\otimes_{i=a+1}^k 1_i) , \quad (223)$$

onde  $\Phi^a(t) = \sum_{n_a} \langle \dot{E}_{n_a}^a(t) | E_{n_a}^a(t) \rangle |E_{n_a}^a(t)\rangle \langle E_{n_a}^a(t)|$ . Portanto, das equações (222) e (223) podemos ver que

$$i\hbar \sum_{\{n_k\}} \Gamma_{\{n_k\}}^a(t) + \langle \dot{E}_{n_a}^a(t) | E_{n_a}^a(t) \rangle |E_{\{n_k\}}(t)\rangle \langle E_{\{n_k\}}(t)| = \mathcal{H}_a^{\text{CD}}(t) , \quad (224)$$

onde  $\mathcal{H}_a^{\text{SA}}(t) = (\otimes_{i=1}^{a-1} 1_i) \otimes H_a^{\text{SA}}(t) \otimes (\otimes_{i=a+1}^k 1_i)$  é o Hamaltoniano contra-diabático que atua sobre a  $a$ -ésima partição do sistema. Substituindo o resultado acima na Eq. (221), a conclusão é que o atalho via Hamiltonianos contra-diabáticos para um Hamiltoniano da forma (212) é feito por meio do hamiltoniano superadiabático

$$H_{\text{SA}}(t) = \sum_{n=1}^k \mathcal{H}_n^{\text{SA}}(t) ,$$

que foi introduzido na Eq. (170). Isso conclui a demonstração da proposição 3.

## F Apêndice F: Prova do Teorema 2

Para demonstrarmos o Teorema 2, considere dois Hamiltonianos  $H(t)$  e  $H(t, G)$  tais que é valido a relação  $H(t, G) = GH(t)G^\dagger$ , com  $GG^\dagger = 1$ , e que nós conhecemos o Hamiltoniano contra-diabático associado ao Hamiltoniano  $H(t)$ . Para determinarmos o Hamiltoniano contra-diabático associado ao Hamiltoniano  $H(t, G)$ , primeiro notamos que

$$|n(s), G\rangle = G|n(s)\rangle \quad (225)$$

é o conjunto de autoestados  $|n(s), G\rangle$  do Hamiltoniano  $H(t, G)$  que pode ser determinado a partir do conhecimento do conjunto de autoestados  $|n(s)\rangle$  do Hamiltoniano  $H(s)$ . Assim

$$H_{\text{CD}}(s, G) = \frac{i\hbar}{\tau} \sum_n |\partial_s n, G\rangle \langle n, G| + \langle \partial_s n, G | n, G \rangle |n, G\rangle \langle n, G|, \quad (226)$$

é o Hamiltoniano contra-diabático associado a  $H(s, G)$ . Agora usamos a relação indicada na Eq. (225) para mostrar que

$$H_{\text{CD}}(s, G) = G \left[ \frac{i\hbar}{\tau} \sum_n |\partial_s n\rangle \langle n| + \langle \partial_s n | n \rangle |n\rangle \langle n| \right] G^\dagger, \quad (227)$$

onde nós usamos o fato de que o operador  $G$  é independente do tempo para escrever que  $|\partial_s n, G\rangle = G|\partial_s n\rangle$ , e que  $GG^\dagger = 1$  para escrever que  $\langle \partial_s n, G | n, G \rangle = \langle \partial_s n | n \rangle$ . Consequentemente nós concluimos que

$$H_{\text{CD}}(s, G) = GH_{\text{CD}}(s)G^\dagger, \quad (228)$$

Assim o termo contra-diabático associado ao Hamiltoniano  $H(t, G)$  pode facilmente ser encontrado a partir do conhecimento prévio do termo contra-diabático associado a  $H(t)$ . Isso conclui a demonstração do Teorema 2.

## G Apêndice G: Prova da Eq. (176)

Com o intuito de demonstrar a validade da Eq. (176), deixe-nos escrever o Hamiltoniano superadiabático que é usado para realizar o TQ de um estado de  $n$  q-bits como

$$H_{\text{SA}}(s) = \sum_{m=1}^n \mathcal{H}_m^{\text{SA}}(s)$$

onde  $\mathcal{H}_k^{\text{SA}}(s) = \left(\otimes_{l=1}^{k-1} \mathbb{1}_l\right) \otimes H_k^{\text{SA}}(s) \otimes \left(\otimes_{l=k+1}^n \mathbb{1}_l\right)$ , com cada  $H_m^{\text{SA}}(s)$  sendo um Hamiltoniano de três q-bits dado pela Eq. (163). Então o custo energético é dado por

$$\Sigma_n = \int_0^1 ds \sqrt{\text{Tr}[H_{\text{SA}}^2(s)]}, \quad (229)$$

onde nós podemos escrever

$$H_{\text{SA}}^2(s) = \sum_{k=1}^n [\mathcal{H}_k^{\text{SA}}(s)]^2 + \sum_{m \neq k} \left( \sum_k \mathcal{H}_k^{\text{SA}}(s) \mathcal{H}_m^{\text{SA}}(s) \right). \quad (230)$$

Agora nós usamos que, para  $k \neq m$ , nós temos

$$\text{Tr}[\mathcal{H}_k^{\text{SA}}(s) \mathcal{H}_m^{\text{SA}}(s)] = (\text{Tr}[\mathbb{1}])^{n-2} \text{Tr}[H_k^{\text{SA}}(s)] \text{Tr}[H_m^{\text{SA}}(s)]. \quad (231)$$

Então, nós escrevemos  $\text{Tr}[H_j^{\text{SA}}(s)] = \text{Tr}[H_j(s) + H_j^{\text{CD}}(s)]$ , onde  $H_j(s)$  é o Hamiltoniano adiabático para o setor  $j$  e  $H_j^{\text{CD}}(s)$  é seu correspondente Hamiltoniano contra-diabático. Mediante o cálculo explícito do traço na base de autoestados de  $H_j(s)$  e usando as Eqs.(37)-(39) e a Eq. (158), nós obtemos que  $\text{Tr}[H_j^{\text{SA}}(s)] = 0$  ( $\forall j \in \{1, \dots, N\}$ ), que então implica em

$$\text{Tr}[\mathcal{H}_k^{\text{SA}}(s) \mathcal{H}_m^{\text{SA}}(s)] = 0 \quad (k \neq m). \quad (232)$$

Assim, o custo energético para o TQ de um estado desconhecido de  $N$  q-bits fica escrito como

$$\begin{aligned} \text{Tr}[H_{\text{SA}}^2(s)] &= \sum_{k=1}^n \text{Tr}\left\{[\mathcal{H}_k^{\text{SA}}(s)]^2\right\} = (\text{Tr}[\mathbb{1}])^{n-1} \sum_{k=1}^n \text{Tr}\left\{[H_k^{\text{SA}}(s)]^2\right\} \\ &= 2^{3(n-1)} n \text{Tr}\left\{[H_k^{\text{SA}}(s)]^2\right\} \quad (\forall k). \end{aligned} \quad (233)$$

Consequentemente, substituindo a Eq. (233) na Eq. (229) obtém-se que

$$\Sigma_n = \sqrt{2^{3(n-1)} n} \Sigma_{\text{single}}. \quad (234)$$

que prova a validade da Eq. (176).

## Referências

- [1] P. Benioff, *The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines*, Journal of Statistical Physics **22**(5), 563–591, (1980).
- [2] P. Benioff, *Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines*, Journal of Statistical Physics **29**(3), 515–546 (1982).
- [3] R.P. Feynman, *Simulating physics with computers*, Int. Jour. Theor. Phys. **21**, 467-488 (1982).
- [4] D. Deutsch, *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer*, Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97-117 (1985).
- [5] L.K. Grover, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), 212-219 (1996).
- [6] L.K. Grover, *Quantum Mechanics helps in searching for a needle in a haystack*, Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [7] D. Deutsch & R. Jozsa, *Rapid solution of problems by quantum computation*, Proc. R. Soc. London A **439**, 553-558 (1992).
- [8] P.W. Shor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, Foundations of Computer Science, 35th Annual Symposium, pp.124-134 (1994).
- [9] M.A. Nielsen & I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Reino Unido, (2000).
- [10] A. Barenco *et al.*, *Elementary gates for quantum computation*, Phys. Rev. A **52**, 3457–3467 (1995).
- [11] E. Farhi *et al.*, *A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instances of an NP-Complete Problem*, Science **292**, 472 (2001).
- [12] M. Born & V. Fock, *Beweis des adiabatsatzes*, Zeit. für Phys. **51**, 165 (1928).
- [13] T. Kato, *On the adiabatic theorem of quantum mechanics*, J. Phys. Soc. Jpn. **5**, 435 (1950).
- [14] A. Messiah, *Quantum mechanics*, North-Holland, Amsterdam (1962).
- [15] D. Aharonov *et al.*, *Adiabatic Quantum Computation is Equivalent to Standard Quantum Computation*, SIAM Journal of Computing **37**:1, 166-194 (2007).
- [16] A. Mizel, D.A. Lidar & M. Mitchell, *Simple Proof of Equivalence between Adiabatic Quantum Computation and the Circuit Model*, Phys. Rev. Lett. **99**, 070502 (2007).



- [17] A.M. Childs, E. Farhi & J. Preskill, *Robustness of adiabatic quantum computation*, Phys.Rev. A **65**, 012322 (2002).
- [18] D.A. Lidar, *Towards Fault Tolerant Adiabatic Quantum Computation*, Phys. Rev. Lett. **100**, 160506 (2008).
- [19] G.L. Long *et al.*, *Experimental NMR realization of a generalized quantum search algorithm*, Phys. Lett. A **286**, 121-126 (2001).
- [20] G.L. Long & Li Xiao, *Experimental realization of a fetching algorithm in a 7 qubit NMR quantum computer*, J. Chem. Phys. **119**, 8473-8481 (2003).
- [21] I.L. Chuang *et al.*, *Experimental realization of a quantum algorithm*, Nature **393**, 143-146 (1998).
- [22] P. Richerme *et al.*, *Experimental performance of a quantum simulator: optimizing adiabatic evolution and identifying many-body ground states*, Phys. Rev. A **88**, 012334 (2013).
- [23] S.H.W. van der Ploeg *et al.*, *Adiabatic Quantum Computation With Flux Qubits, First Experimental Results*, Applied Superconductivity, IEEE Transactions **17**:2, 113-119 (2007).
- [24] N. Chancellor & S. Haas, *Scalable universal holonomic quantum computation realized with an adiabatic quantum data bus and potential implementation using superconducting flux qubits*, Phys. Rev. A **87**, 042321 (2013).
- [25] R. Barends *et al.*, *Digitized adiabatic quantum computing with a superconducting circuit*, pre-print *arXiv:1511.03316*.
- [26] M.W. Johnson *et al.*, *Quantum annealing with manufactured spins*, Nature **473**, 194 (2011).
- [27] S. Boixo *et al.*, *Evidence for quantum annealing with more than one hundred qubits*, Nature Phys. **10**, 218 (2014).
- [28] D.M. Tong, K. Singh, L.C. Kwek & C.H. Oh, *Sufficiency Criterion for the Validity of the Adiabatic Approximation*, Phys. Rev. Lett. **98**, 150402 (2007).
- [29] M.S. Sarandy, L.-A. Wu & D.A. Lidar, *Consistency of the Adiabatic Theorem*, Quantum Information Processing **3**, 331 (2004).
- [30] D. M. Tong, *Quantitative Condition is Necessary in Guaranteeing the Validity of the Adiabatic Approximation*, Phys. Rev. Lett. **104**, 120401 (2010).
- [31] H.X. Cao, Z. Guo, Z. Chen & W. Wang, *Quantitative sufficient conditions for adiabatic approximation*, Sci China - Phys. Mech. Astron. **56**, 1401 (2013).

- [32] M.H.S. Amin, C.J.S. Truncik & D.V. Averin, *Role of single-qubit decoherence time in adiabatic quantum computation*, Phys. Rev. A **80**, 022303 (2009).
- [33] M.V. Berry, *Quantum phase corrections from adiabatic iteration*, Proc. R. Soc. A **414**, 31-46 (1987).
- [34] M.V. Berry, *Histories of adiabatic quantum transitions*, Proc. R. Soc. A **429**, 61-72 (1990).
- [35] R. Lim & M.V. Berry, *Superadiabatic Tracking of Quantum Evolution*, J. Phys. A **24**, 3255-3264 (1991).
- [36] S. Ibáñez, Xi Chen & J.G. Muga, *Improving shortcuts to adiabaticity by iterative interaction pictures*, Phys. Rev. A **87**, 043402 (2013).
- [37] M. Demirplak & S. A. Rice, *Adiabatic Population Transfer with Control Fields*, J. Phys. Chem. A **107**, 9937 (2003).
- [38] M. Demirplak & S. A. Rice, *Assisted adiabatic passage revisited*, J. Phys. Chem. B **109**, 6838 (2005).
- [39] M.V. Berry, *Transitionless quantum driving*, J. Phys. A **42**, 365303 (2009).
- [40] H.R. Lewis & W.B. Riesenfeld, *An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field*, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [41] D. Bacon & S. T. Flammia, *Adiabatic Gate Teleportation*, Phys. Rev. Lett. **103**, 120504 (2009).
- [42] I. Hen, *Quantum gates with controlled adiabatic evolutions*, Phys. Rev. A **91**, 022309 (2015).
- [43] A.C. Santos & M.S. Sarandy, *Superadiabatic Controlled Evolutions and Universal Quantum Computation*, Sci. Rep. **5**, 15775 (2015).
- [44] A.C. Santos, R.D. Silva & M.S. Sarandy, *Shortcut to Adiabatic Gate Teleportation*, Phys. Rev. A **93**, 012311 (2016).
- [45] A.Y. Kitaev, *Quantum computations: Algorithms and error correction*, RMS: Russian Mathematical Surveys **52**(6), 1191 (1997).
- [46] D. Aharonov, *A Simple Proof that Toffoli and Hadamard are Quantum Universal*, e-print: Arxiv:quant-ph/0301040 (2003).
- [47] P.O. Boykin *et al.*, *A new universal and fault-tolerant quantum basis*, Information Processing Letters **75**, 101–107 (2000).

- [48] C. H. Bennett *et al.*, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [49] D. Gottesman & I. L. Chuang, *Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations*, Nature **402**, 390-393 (1999).
- [50] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, by Addison-Wesley Publishing Company, Rev. Ed. (1982).
- [51] D.M. Tong, K. Singh, L.C. Kwek & C.H. Oh, *Quantitative Conditions Do Not Guarantee the Validity of the Adiabatic Approximation*, Phys. Rev. Lett. **95**, 110407 (2005).
- [52] J. Du *et al.*, *Experimental Study of the Validity of Quantitative Conditions in the Quantum Adiabatic Theorem*, Phys. Rev. Lett. **101**, 060403 (2008).
- [53] A. Ambainis & O. Regev, *An Elementary Proof of the Quantum Adiabatic Theorem*, e-print: arXiv:quant-ph/0411152 (2004).
- [54] M.H.S. Amin, *Consistency of the Adiabatic Theorem*, Phys. Rev. Lett. **102**, 220401 (2009).
- [55] S. Jansen, M.-B. Ruskai & R. Seiler, *Bounds for the adiabatic approximation with applications to quantum computation*, J. Math. Phys. **48**, 102111 (2007).
- [56] M.V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. R. Soc. A **392**, 45 (1984).
- [57] H.L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo Vol. 1*, LTC, 5<sup>a</sup> Ed. (2011).
- [58] J.W. Brown & R.V. Churchill, *Fourier series and boundary value problems*, McGraw-Hill, New York, (1993).
- [59] W.H. Wang, Z.H. Guo & H.X. Cao , *An upper bound for the adiabatic approximation error*, Sci. China-Phys. Mech. Astron. **56**(2), 218–224 (2014).
- [60] W.H. Wang, H.X. Cao, Lu Ling & B.M. Yu, *An upper bound for the generalized adiabatic approximation error with a superposition initial state*, Sci. China-Phys. Mech. Astron. **58**(3), 030001 (2015).
- [61] H. Takesue *et al.*, *Quantum teleportation over 100 km of fiber using highly-efficient superconducting nanowire single photon detectors*, Optica **2**, 832 (2015).
- [62] X.-S. Ma *et al.*, *Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward*, Nature **489**, 269 (2012).
- [63] G. Brassard, *Teleportation as a quantum computer*, Physica D **120**, 43-47 (1998).

- [64] R.A. Horn & C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, (New York: Cambridge University Press) (1991).
- [65] D. Aharonov, *A Simple Proof that Toffoli and Hadamard are Quantum Universal*, e-print: *arXiv:quant-ph/0301040* (2003).
- [66] Y. Zheng, S. Campbell, G. De Chiara & D. Poletti, *Cost of transitionless driving and work output*, *arXiv:1509.01882* (2015).
- [67] M. Kieferová & N. Wiebe, *On the power of coherently controlled quantum adiabatic evolutions*, *New J. Phys.* **16** 123034 (2014).
- [68] L. Mandelstam & I.G. Tamm, *The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics*, *J. Phys. (Moscow)* **9**, 249 (1945).
- [69] N. Margolus & L.B. Levitin, *The maximum speed of dynamical evolution*, *Physica D* **120**, 188 (1998).
- [70] V. Giovannetti, S. Lloyd & L. Maccone, *Quantum limits to dynamical evolution*, *Phys. Rev. A* **67**, 052109 (2003).
- [71] S. Deffner & E. Lutz, *Energy-time uncertainty relation for driven quantum systems*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 335302 (2013).
- [72] S. Teufel, *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics. Lecture Notes in Mathematics 1821*, SpringerVerlag, Berlin, Heidelberg, New York (2003).
- [73] G. Vacanti *et al.*, *Transitionless quantum driving in open quantum systems*, *New J. Phys.* **16**, 053017 (2014).
- [74] S. Deffner & E. Lutz, *Quantum Speed Limit for Non-Markovian Dynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 010402 (2013).
- [75] A. del Campo, I.L. Egusquiza, M.B. Plenio & S.F. Huelga, *Quantum Speed Limits in Open System Dynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 050403 (2013).